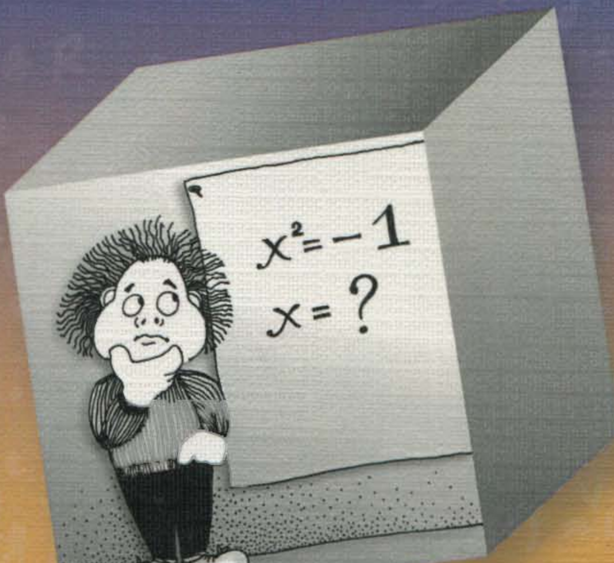
МАТЕМАТИКА • ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

Комплексные числа



Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Комплексные числа

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

УНИВЕРСИТЕТ
книжный дом
ПЕТРОГЛИФ
МЦНМО

С.-Петербург
Москва
2014

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6
Ш 32

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рекомендовано:

Московским институтом открытого образования (МИОО) и Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А.Х.

Ш32 Комплексные числа : Учеб. пособие. — 3-е изд. — СПб.: «Петроглиф» : М.: Изд-во МЦНМО : ИД КДУ, 2014. — 176с.: илл. — ISBN 978-5-98712-043-9, ISBN 978-5-94057-793-5, ISBN 978-5-906226-20-4.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах.

Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-98712-043-9 («Петроглиф»)
ISBN 978-5-94057-793-5 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-906226-20-4 (ИД КДУ)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 9-11 классов (25 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–3	**Натуральные, целые и рациональные числа. Периодические дроби (стр. 7–18)**
4	**Иррациональные числа (стр. 19–22)**
5–6	**Аксиоматика комплексных чисел (стр. 23–28)**
7–8	**Действия над множеством комплексных чисел (алгебраическая форма) (стр. 29–33)** Практикум 1 (1, 2)
9–10	**Модуль комплексного числа. Комплексные сопряженные числа (стр. 34–41)** Практикум 2 (1, 2, 3, 5, 7)
11–13	**Геометрическая интерпретация комплексных чисел (стр. 42–46)** Практикум 3 (1–4)
14–16	**Тригонометрическая форма комплексного числа (стр. 47–63)** Практикум 4 (1.1, 2, 3.3; 4.1–4.5) Практикум 5 (1, 3, 4, 6, 9, 10) Тренировочная работа 3 (8, 9, 10)
17–19	**Извлечение корня из комплексного числа (стр. 69–79)** Практикум 6 (2, 3, 6, 7, 10)
20–22	**Алгебраические уравнения на множестве комплексных чисел (стр. 80–87)** Тренировочная работа 4 (1 вариант – 1.2, 2, 3.3, 3.5, 3.6)
23–25	**Решение различных задач по теме «Комплексные числа» (стр. 94–114)** Практикум 8 (1, 2, 5, 7, 10, 13) Практикум 9 (2, 4, 6, 8, 9, 10) Тренировочная работа 5 (1 вариант – 1.1, 1.2, 1.3) Тренировочная работа 6 (2 вариант – 1, 3, 5, 7, 8)

Программа разработана по материалам книги и апробирована на практике Заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

Вступление

Одним из основных понятий в математике является понятие числа. Сначала, в процессе счета предметов, сложилось понятие натурального числа; это понятие является отражением в сознании человека количественной стороны конечных событий (множеств, предметов). Но уже простейшие запросы практики, связанные с измерением, привели к расширению понятия числа. Именно под влиянием этих запросов постепенно сложилось понятие дробного (рационального положительного) числа, а затем уже весьма сложно и драматично понятие иррационального числа, которое окончательно выкристаллизовывается только во второй половине XIX века в работах Вейерштрасса и Дедекинда. Несколько иначе формировалось понятие отрицательного числа. Оно появилось под влиянием внутренних потребностей самой математики, в связи с необходимостью сделать разрешимыми уравнения вида $a+x=b$, даже при $a>b$. Первые упоминания об отрицательных числах и действиях над ними встречаются в работах китайских математиков III в. до н. э. и индийских математиков в VII веке н. э., им же принадлежит общеизвестное теперь истолкование отрицательных и положительных чисел как арифметическое образование противоположно направленных величин (перемещение вдоль прямой в одном и противоположном направлении, прибыли и убытка). Именно это истолкование особенно содействовало тому, чтобы новое понятие отрицательного числа стало равноправным с понятием положительного числа.

Дать определение натурального, целого, рационального числа нельзя. Можно только дать определение множества всех натуральных, целых, рациональных чисел с определенными на них действиями и указанием их свойств. Первым точное научное определение с использованием аксиоматики для множества натуральных чисел дал Пеано. Несколько позже мы его рассмотрим.

1

Действительные числа

Введение

Определение 1. *Действием* на множестве M называется закон сопоставления двум элементам a и b, принадлежащим множеству M, элемента c.

Определение 2. Действие называется *замкнутым*, если элементы a, b и c принадлежат одному и тому же множеству.

Свойства действий

1) $\left.\begin{matrix} a+b=b+a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{matrix}\right|$ — свойство коммутативности;

2) $\left.\begin{matrix} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{matrix}\right\|$ — свойство ассоциативности;

3) $(a+b)c=a \cdot c+b \cdot c$ — свойство дистрибутивности.

Примечания

1. Свойство коммутативности действий не столь тривиально, как может показаться. Рассмотрим следующий пример.
Пусть $a \square b = c$, где $\square$ — квадратик — обозначает какое-то действие, т. е. закон сопоставления двум элементам множества M элемента из множества M, если действие замкнуто.
Положим $a \square b = b^2 a$. Тогда $b \square a = a^2 b$, значит, $a \square b \neq b \square a$ (так как $a^2 b \neq b^2 a$), т. е. свойство коммутативности для такого действия не выполняется.

2. Рассмотрим пример действия, не обладающего свойством ассоциативности.
Пусть $a \circ b = \dfrac{a+b}{2}$, где $\circ$ — кружочек — знак некоторого действия. Тогда

$$(a \circ b) \circ c = \frac{a+b}{2} \circ c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4};$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ \frac{b+c}{2} = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}.$$

Следова́тельно

$$(a \circ b) \circ c \neq a \circ (b \circ c),$$

т. е. свойство ассоциативности для такого действия не выполняется.

3. Рассмотрим пример пары действий, не обладающих свойством дистрибутивности.
Пусть $a \triangle b = ab$, $a \circ b = \dfrac{a+b}{2}$, тогда

$$(a \circ b) \triangle (a \circ c) = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+c}{2} = \frac{a^2+ab+ac+bc}{4};$$

$$a \circ (b \triangle c) = a \circ bc = \frac{a+bc}{2},$$

значит,

$$(a \circ b) \triangle c \neq a \circ (b \triangle c),$$

так как в общем случае

$$\frac{a+bc}{2} \neq \frac{ac+bc+ab+a^2}{4},$$

т. е. свойство дистрибутивности для таких действий не выполняется.

Натуральные числа

Рассмотрим множество натуральных чисел $\mathbb{N}=\{1;2;3;4;\ldots\}$ с определенными на нем действиями сложения и умножения.

1. Действия сложения и умножения на $\mathbb{N}$ замкнуты.

Действия вычитания и деления на $\mathbb{N}$ определены не всегда, т. е. не замкнуты.

Примеры: выражение $(3-7)$ на $\mathbb{N}$ не определено; выражение $(5:7)$ на $\mathbb{N}$ не определено.

2. Определение 3. Элемент a_0 называется *минимальным* элементом множества M_1, если для любого $a\in M_1$ выполнено $a_0\leqslant a$.

Определение 4. Элемент a_0' называется *максимальным* элементом множества натуральных чисел M_1, если для любого $a\in M_1$ выполнено $a_0'\geqslant a$.

Отметим, что на множестве всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ есть минимальный элемент: это $a_0=1$.

Отметим также, что любое подмножество множества $\mathbb{N}$ имеет минимальный элемент.

Пример. Пусть $A=\{3;5;6;8;10\}$; $a_0=3$ есть минимальный элемент A; в данном случае имеется и максимальный элемент — это $a_0'=10$.

3. Определение 5. Элемент $E_{\text{П}}$ множества M называется *правой единицей*, если для любого $a\in M$ выполнено $a\cdot E_{\text{П}}=a$.

Определение 6. Элемент $E_{\text{Л}}$ множества M называется *левой единицей*, если для любого $a\in M$ выполнено $E_{\text{Л}}\cdot a=a$.

Так как действие умножения на $\mathbb{N}$ коммутативно, то $E_{\text{Л}}=E_{\text{П}}=E$, причем $E=1$.

Примечание. Для множеств с определенным на них некоммутативным действием умножения, возможно, $E_{\text{Л}}\neq E_{\text{П}}$, но этот случай рассматривается уже в курсе теории чисел и высшей алгебры. Иногда E называют мультипликативной единицей, так как свойство единицы в данном случае связано с действием умножения.

4. Свойство дискретности. Между любыми двумя натуральными числами находится конечное число натуральных чисел.

Пример. Между 5 и 12 находится 6 натуральных чисел, а именно $6;7;8;9;10;11$.

Примечание. Между любыми рядом стоящими натуральными числами нельзя расположить ни одного натурального числа.

Аксиомы натуральных чисел[1]

Первое аксиоматическое определение множества натуральных чисел дано итальянским математиком Джузеппе Пеано (1858–1932).

Натуральными числами называются элементы некоторого множества $\mathbb{N}$, если для него выполняются следующие аксиомы.

$\boxed{A}$ На множестве $\mathbb{N}$ определено действие сложение, представляющее правило, по которому каждой паре чисел $a, b \in \mathbb{N}$ сопоставляется число $c \in \mathbb{N}$, и обозначается это так: $a + b = c$, причем выполняются аксиомы

A_1 $a + b = b + a$, $a, b \in \mathbb{N}$ — свойство коммутативности;

A_2 $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a, b, c \in \mathbb{N}$ — свойство ассоциативности.

$\boxed{B}$ На множестве $\mathbb{N}$ определено отношение сравнения чисел по величине, представляющее собой правило, которое выделяет некоторые пары чисел $(a; b)$, причем пишут $a < b$ и говорят, что a меньше b. При этом выполняются следующие свойства (аксиомы).

B_1 Свойство линейности: для любого $a, b \in \mathbb{N}$ всегда выполняется только одна из трех возможностей: либо $a < b$, либо $a = b$, либо $b < a$.

B_2 Свойство положительности: $a < b$ имеет место только тогда, когда $a + z = b$, $z \in \mathbb{N}$.

B_3 Свойство минимальности. В любом не пустом $M \subset \mathbb{N}$ найдется $a \in M$, такой, что для любого $z \in M$ будет выполняться соотношение $a \leqslant z$, где a называется минимальным элементом множества M. Минимальный элемент множества $\mathbb{N}$ называется *единицей* и обозначается 1.

$\boxed{C}$ На множестве $\mathbb{N}$ определено действие умножения, представляющее собой правило, которое каждой паре $a, b \in \mathbb{N}$ сопоставляет $c = a \cdot b$, при этом выполняются свойства (аксиомы).

C_1 $a \cdot 1 = a$, $a \in \mathbb{N}$;

C_2 $a \cdot b = b \cdot a$, $a, b \in \mathbb{N}$ — свойство коммутативности;

C_3 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $a, b, c \in \mathbb{N}$ — свойство ассоциативности.

$\boxed{D}$ Свойство (аксиома), соединяющее действия сложения и умножения: $(a + b)c = ac + bc$ — свойство дистрибутивности.

[1]При первом чтении может быть пропущено.

Можно доказать следующие следствия из определения натуральных чисел.

Следствие 1. Свойство сократимости сложения.

Для любых $a, b, c \in \mathbb{N}$, если $a + c = b + c$, то $a = b$.

Следствие 2. Свойство сократимости умножения.

Для любых $a, b, c \in \mathbb{N}$, если $ac = bc$, то $a = b$.

Определение. Если $a + z = b$, то z называется *разностью* чисел a и b и записывается

$$z = b - a.$$

Примечание. По B_2 это возможно только при $a < b$. Действие по нахождению z, по a и b называется *действием вычитания.*

Следствие 3. Если действие вычитания возможно, то оно однозначно.

Следствие 4. Свойство дистрибутивности для разности:

$$(b - a)c = bc - ac.$$

Определение. Если $ax = b$ для $a, x, b \in \mathbb{N}$, то x называется *частным от деления* b на a и записывается

$$x = \frac{b}{a}.$$

Следствие 5. В множестве $\mathbb{N}$ действие деления выполняется не всегда. Действительно $\frac{1}{a} \notin N$, если $a \neq 1$.

Следствие 6. Если деление возможно, то оно однозначно.

Свойства сравнения чисел по величине

Следствие 7. Свойство транзитивности. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ для $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Следствие 8. Свойство стабильности. Если $a < b$, то

$$\left.\begin{array}{c} a + c < b + c \\ ac < bc \end{array}\right| \text{ для } a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ где } c \text{ — любое из } \mathbb{N}.$$

Введем обозначения.

$$1 + 1 = 2, \quad \text{по } B_2 \ \ 1 < 2;$$

$$2 + 1 = 3, \quad \text{по } B_2 \ \ 2 < 3;$$

$$3 + 1 = 4, \quad \text{по } B_2 \ \ 3 < 4.$$

Таким способом получим цепочку натуральных чисел. Можно доказать, что в этой цепочке содержатся все натуральные числа.

Целые числа

В связи с необходимостью дальнейшего расширения класса чисел из-за потребности описывать долговые отношения при торговле и решать уравнения вида $a+x=b$ при $a>b$ и т. д. были введены отрицательные натуральные числа $\mathbb{N}^- = \{\ldots -n; \ldots; -4; -3; -2; -1\}$, а затем $\mathbb{N}_0 = \{0\}$, т. е. число 0. Но произошло это не ранее VII века, а в европейскую науку и практику вошло только в XII–XIV веках. Так постепенно сформировалось понятие целого числа

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^- \cup \mathbb{N}_0 = \{\ldots -n; \ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots n; \ldots\}.$$

Разумеется, при расширении класса чисел необходимо было сохранить основные свойства (аксиомы) действий, определенных на множестве всех натуральных чисел:

1) $\left.\begin{array}{l} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{array}\right|$ — свойство коммутативности;

2) $\left.\begin{array}{l} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \end{array}\right\|$ — свойство ассоциативности;

3) $(a+b)c=a\cdot c+b\cdot c$ — свойство дистрибутивности.

На множестве $\mathbb{Z}$ действие вычитания как обратное действию сложения замкнуто, т. е. всегда определено; также разрешимы уравнения вида $a+x=b$, даже при $a>b$.

В VII веке индийский математик Брахмагупта активно использует понятие отрицательного числа и уже полностью владеет теорией решения уравнений первой и второй степени с одним неизвестным.

Примеры.

а) $5-7=-2\in\mathbb{Z}$;

б) $6+x=3$; $x=3-6$; $x=-3\in\mathbb{Z}$;

в) $5-x=7$; $5=x+7$; $5-7=x$; $x=-2\in\mathbb{Z}$.

Впервые такой способ решения уравнений описан в труде великого хорезмского математика Мухаммеда ибн Муссы (около 780–850 гг. н. э.) в трактате «Книга восстановления и противопоставления». «Восстановлением» Мухаммед называет перенос вычитаемого из одной части уравнения в другую, где оно становится слагаемым. «Противопоставлением» он называет собирание неизвестных по одну сторону и известных по другую сторону равенства. «Восстановление» по-арабски произносится «ал-джебра». Отсюда, скорее всего, произошло слово алгебра.

Определение. Число $(-a)$ называется *противоположным* числу a, если $a+(-a)=0$.

Отметим ряд любопытных свойств нуля.

1) Число 0 обладает свойством правой и левой единицы относительно сложения, т.е. $a+0=0+a=a$ (0 иногда называют аддитивной единицей).
2) Но число 0 обладает еще одним уникальным свойством уже относительно умножения: $0\cdot a=a\cdot 0=0$ для любого $a\in\mathbb{Z}$.

Подведем некоторые итоги.

Какие же свойства натуральных чисел при расширении до целых чисел сохранились, а какие были утрачены?

Сохранились свойства действий:

а) коммутативность сложения и умножения;
б) ассоциативность сложения и умножения;
в) дистрибутивность, связывающая действия сложения и умножения;
г) наличие единицы (мультипликативной), т.е. $a\cdot 1=1\cdot a=a$;
д) замкнутость действия умножения и сложения;
е) свойства дискретности.
   Действительно, между любыми двумя целыми находится конечное число целых чисел. Между -5 и 4 расположены 8 целых чисел $-4;-3;-2;-1;0;1;2;3$;
ж) в любом конечном подмножестве множества всех целых чисел есть минимальный и максимальный элемент.
   Пусть $A=\{-6;-5;-4;1;3;2;7\}$, тогда
   $a_0=-6$ — минимальный элемент;
   $a_0^1=7$ — максимальный элемент;
з) $E=1$ является и на множестве целых чисел мультипликативной единицей;
и) деление также возможно не всегда, т. е. незамкнуто.

Новым является:

а) возможность решения уравнений вида $a+x=b$ даже при $a>b$ (действие вычитания замкнуто);
б) наличие аддитивной единицы, которой является 0 (ноль), т.е. $0+a=a+0=a$;
в) аддитивная единица 0 (ноль) также обладает свойством универсального поглощения, т.е. $0\cdot a=a\cdot 0=0$.

Потеряли минимальный элемент всего множества. На множестве всех целых чисел нет минимального элемента всего множества.

Рациональные числа

В связи с необходимостью решать задачи деления на части, взимать налоги, долговые обязательства и т. д. необходимо было расширить класс целых чисел. Так постепенно сформировалось понятие дробного (рационального) числа[2]. Когда впервые появилось понятие дроби — неизвестно. Но археологические раскопки доказывают, что древние египтяне, китайцы, хорезмийцы за много веков до древних греков были знакомы с дробными числами и умели выполнять простейшие арифметические действия над ними.

Определение. *Рациональными числами* назовем множество чисел вида $\frac{p}{q}$, где $q \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N} \text{ и } p \in \mathbb{Z}\right\}$, для которых выполняются основные свойства (аксиомы) действий.

Рассмотрим дробные, или рациональные числа.

Очень важно сохранение основных свойств целых чисел, т. е. свойств действий над ними:

1) $\left.\begin{array}{l} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{array}\right|$ — свойство коммутативности;

2) $\left.\begin{array}{l} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \end{array}\right\|$ — свойство ассоциативности;

3) $(a+b)c=a\cdot c+b\cdot c$ — свойство дистрибутивности.

Введение рациональных чисел означало, что действие деления для любых чисел на любое число, не равное нулю, определено, т. е. действие деления замкнуто. В рамках множества рациональных чисел стали однозначно разрешимыми уравнения вида $ax=b$ $(a\neq 0)$.

Какие же свойства целых чисел при расширении до рациональных сохранились, а какие же были утрачены?

С о х р а н и л и с ь следующие свойства действий:

а) коммутативность сложения и умножения;

б) ассоциативность сложения и умножения;

в) дистрибутивность, связывающая действия сложения и умножения;

г) замкнутость действия вычитания;

д) наличие единицы (мультипликативной), т. е. $1\cdot\frac{p}{g}=\frac{p}{g}\cdot 1=\frac{p}{g}$;

е) наличие единицы (аддитивной), иначе говоря нуля, т. е.

$$0+\frac{p}{g}=\frac{p}{g}+0=\frac{p}{g}.$$

[2] *Рацио* по-итальянски значит *отношение*.

П р и о б р е л и замкнутость действия деления на числа, неравные нулю: в том числе возможность однозначно решать уравнения вида $ax = b$ $(a \neq 0)$.

П о т е р я л и дискретность.

1. Можно доказать, что между любыми двумя рациональными числами можно расположить бесконечное множество рациональных чисел.

Действительно, пусть $a = \frac{p_1}{g_1}$ и $b = \frac{p_2}{g_2}$ $(a < b)$, т. е. $a, b \in \mathbb{Q}$. Тогда положим $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$.

Рассмотрим $a_1 - a = \dfrac{a+b}{2} - a = \dfrac{b-a}{2} > 0$, т. е. $a_1 > a$ $\left(\frac{b-a}{2} \in \mathbb{Q}\right)$.

Далее рассмотрим $b - a_1 = b - \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b-a}{2} > 0$, т. е. $b > a_1$, тогда $a < a_1 < b$.

Далее положим $a_2 = \dfrac{a+a_1}{2}$ (можно было бы положить $a_2 = \dfrac{a_1+b}{2}$), тогда $a_1 - a_2 = a_1 - \dfrac{a+a_1}{2} = \dfrac{a_1-a}{2} > 0$, т. е. $a_1 > a_2$ $\left(\frac{a_1-a}{2} \in \mathbb{Q}\right)$; $a_2 - a = \dfrac{a+a_1}{2} - a = \dfrac{a_1-a}{2} > 0$, т. е. $a_2 > a$, значит, $a < a_2 < a_1 < b$. Процесс этот можно продолжать до бесконечности. Получим

$$a < \ldots < a_n < a_{n-1} < \ldots < a_2 < a_1 < b \quad \left(\frac{a_n - a_{n-1}}{2} \in \mathbb{Q}\right),$$

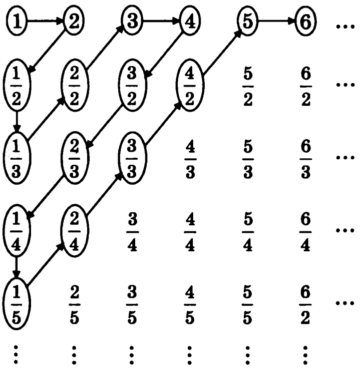
т. е. получим бесконечное множество рациональных чисел, которые можно расположить между произвольными рациональными числами (более строгое доказательство требует знания и применения метода математической индукции).

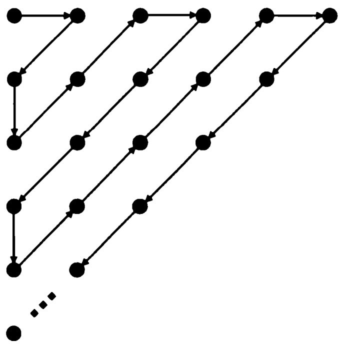
2. Не в каждом подмножестве множества рациональных чисел есть минимальный или максимальный элемент.

Задача. Найдите максимальный или минимальный элемент, находящийся между числами 2 и 5.

Увы, таких нет. Если бы рассматривали задачу на множестве $\mathbb{N}$, то 3 было бы минимальным элементом, а 4 — максимальным, но на множестве $\mathbb{Q}$ это невозможно, так как минимальный элемент должен был бы сколько угодно близко располагаться к числу 2, а максимальный к числу 5. Но в силу потери дискретности, даже полагая, что a_0 есть минимальный элемент $(a_0 > 2)$, получим, что $\dfrac{2+a_0}{2} < a_0$, т. е. есть число, еще более близко расположенное к числу 2. Значит, $2 < \dfrac{2+a_0}{2} < a_0$. Аналогично, полагая, что a_0' — максимальный элемент $(a_0' < 5)$, получим, что $\dfrac{5+a_0'}{2} > a_0'$, значит, $a_0' < \dfrac{5+a_0'}{2} < 5$ что и требовалось доказать.

3. Весьма любопытно еще одно общее свойство множества всех натуральных чисел и, скажем, множества всех положительных рациональных чисел. Оказывается, в известном смысле, количество элементов (чисел) в этих множествах одно и то же, хотя и бесконечное. Действительно, представьте, что вам надо пересчитать количество банок, и бутылок на складе, причем у вас есть известное количество пронумерованных крышек. Ясно, что чтобы сосчитать известное количество банок и бутылок и при этом не ошибиться достаточно на каждую бутылку и банку надеть крышку, т. е. установить однозначное соответствие между ними. Для доказательства утверждения мы поступим примерно так же. Выпишем в одну строчку положительные рациональные числа со знаменателем 1, затем в следующую строчку все рациональные числа со знаменателем 2 и т. д.





В данном случае *установить* однозначное *соответствие* между множеством всех натуральных чисел и множеством всех положительных рациональных чисел это значит *дать алгоритм*, по которому мы будем последовательно нумеровать все положительные рациональные числа. Алгоритм задается геометрически стрелками. Очевидно, что таким образом любое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ получит свой номер. Например, $\frac{5}{2}$ находится под номером 17. На самом деле есть только однозначное соответствие, но не взаимно однозначное соответствие, так как 1 это и $\frac{2}{2}$; и $\frac{3}{3}, \ldots, \frac{10}{10}, \ldots$ и т. д.

Аналогично $\frac{1}{2}$ это и $\frac{2}{4}$, и $\frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$.

Таким образом, несмотря на чудовищную избыточность, можно, как выяснилось, занумеровать все положительные рациональные числа (это весьма любопытный алгоритм для начинающих программистов). Теорема эта носит имя Г. Кантора — основателя теории множеств, впервые сформулировавшего это утверждение и предложившего метод его доказательства.

Еще в древнеегипетском папирусе Райнда, переписанным около 1650 года до н. э. писцом Ахмесом, рассматривались лишь дроби вида $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (в современной математике называются аликвотными) для решения различных задач. Например: разделить 7 хлебов справедливо между 8 людьми. Так как $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, то каждому человеку необходимо было дать по половине, четверти и восьмушке хлеба. В наше же время ученик предложил бы каждый хлеб разрезать на 8 частей и каждому человеку дал бы по одной части от каждого хлеба. Естественно египетский способ с точки зрения разрезания во много раз экономичнее (в этом и был смысл употребления аликвотных дробей), хотя с точки зрения математики существенно трудней.

В 1585 году нидерландский математик Симон Стевин в книге «Десятина» ввел и объяснил десятичные дроби; появилась так называемая позиционная система записи числа:

$$\frac{1}{10^k} = 0,\underbrace{0\ldots01}_{k \text{ цифр}}.$$

Немецкий математик Георг Андреас Беклер в 1661 году ввел запятую после целой части числа. Очевидно, что для того чтобы обыкновенную несократимую дробь $\frac{m}{n}$ записать в виде десятичной необходимо воспользоваться методом деления уголком. Правда в одних случаях процесс деления будет конечным, в других бесконечным. Известно, что если в разложении на простые множители числа n встречаются только числа 2 и 5, то десятичная дробь будет конечной. Например, $\frac{1}{25} = 0{,}04$, во всех других случаях в записи десятичной дроби возникают периодически повторяющиеся группы цифр — периоды. Например,

$$\frac{1}{7} = 0{,}(142857); \quad \frac{1}{52} = 0{,}01(923076).$$

Отметим, что период начинается сразу после запятой, если в несократимой дроби $\frac{m}{n}$ знаменатель в разложении не содержит чисел 2 и 5.

Еще более любопытный вопрос, чему равна длина периода (т. е. количество цифр в периоде)? Для дроби вида $\frac{1}{p}$, где p — простое число, не равное 2 и 5, этот вопрос решил еще в молодые годы К. Ф. Гаусс.

Длина периода для дроби $\frac{1}{p}$ равна наименьшему значению числа r, для которого $(10^r - 1)$ кратно p. Так, для $\frac{1}{7} = 0,(142857)$ имеем

$$(10^6 - 1) = 7 \cdot 142857,$$

т. е. период равен 6.

Определение. *Бесконечной периодической дробью* называется десятичная дробь, у которой после запятой стоит бесконечно много цифр, причем одна цифра или упорядоченная группа цифр, начиная с некоторого разряда после запятой, повторяется. Эта цифра или упорядоченная группа цифр называется периодом.

Теорема. Любая конечная десятичная дробь $0,a_1a_2a_3\ldots a_n$ представима единственным образом в виде обыкновенной дроби.

$$0,a_1a_2a_3\ldots a_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} = \\ = \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n \cdot 10^0}{10^n} = \frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{10^n},$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Например,

$$0,13579 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{9}{10^5} = \\ = \frac{1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0}{10^5} = \frac{13579}{10^5}.$$

Теорема. Каждая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, знаменатель которой содержит хотя бы один кратный множитель, отличный от 2 и 5, может быть представлен в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Теорема. Любая бесконечная периодическая десятичная дробь может быть единственным образом представлена в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{m}{n}$.

Примеры.

а) $0,(134)$. Пусть $0,(134) = x$. Умножим на 10^3, $134,(134) = 1000x$, и вычтем почленно $0,(134) = x$. Получим $1000x - x = 134$.

$$\begin{array}{r} -\ 134,(134) \\ 0,(134) \\ \hline 134 \end{array}$$

$999x = 134$, т. е. $\frac{134}{999}$ — обыкновенная дробь.

б) $0{,}27(41)$. Пусть $0{,}00(41)=x$. Умножим на 10^2 обе части: $0{,}(41)=$ $=100x$; $100x-x=0{,}41(41)-0{,}00(41)=0{,}41$, т. е. $99x=0{,}41$. Тогда $9900x=41$, значит, $x=\frac{41}{9900}$, но

$$0{,}27(41)=0{,}27+0{,}0041=\frac{27}{10^2}+\frac{41}{99\cdot 10^2}=$$
$$=\frac{27\cdot 99+41}{99\cdot 10^2}=\frac{2673+41}{99\cdot 10^2}=\frac{2714}{9900}=\frac{1357}{4950}.$$

Сформулируем правило. Чтобы обратить бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность записать в числитель, а в знаменателе написать число, выраженное столькими девятками, сколько цифр в периоде, и со столькими нулями в конце, сколько цифр между запятой и периодом.

Примеры.

а) $0{,}3(47)=\frac{347-3}{990}=\frac{344}{990}=\frac{172}{495}$;

б) $0{,}(063)=\frac{63}{999}=\frac{7}{111}$;

в) $0{,}27(41)=\frac{2741-27}{9900}=\frac{2714}{9900}=\frac{1357}{4950}$.

Утверждение. Можно показать, что любую десятичную дробь можно двумя способами представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Например,

$$0{,}17(0)=\frac{170-17}{900}=\frac{153}{900}=\frac{17}{100}=0{,}17;$$
$$0{,}16(9)=\frac{169-16}{900}=\frac{153}{900}=\frac{17}{100}=0{,}17.$$

Чтобы было однозначное представление одной и той же конечной десятичной дроби в виде бесконечной периодической десятичной дроби, принято не иметь цифру 9 периодом.

Теорема. Любая обыкновенная несократимая дробь может быть единственным образом представлена в виде бесконечной периодической десятичной дроби и наоборот.

Определение. Любая бесконечная периодическая десятичная дробь называется рациональным числом.

Иррациональные числа

История открытия иррациональных чисел была весьма драматична и в чем-то очень романтична. В знаменитой школе Пифагора в VI веке до н. э., проповедуя идею гармонии и соразмерности в мире, считали, что в основе его устройства лежат целые числа или их отношения. И когда выяснилось, что для любого квадрата его диагональ несоизмерима со стороной — мир гармонии для них рухнул. Известно, что это открытие пифагорейцы держали в большой тайне. Позже, когда один из них — Гиппас из Метапонта разгласил этот секрет, его, семью и потомков прокляли пифагорейцы. Кстати, сам он после этого странным образом утонул, что весьма подробно описывает античный философ Ямлих.

Демокрит рассматривал отрезки как ряды атомов, то есть отношение отрезков есть просто отношение чисел атомов них. Эта идея оказалась очень плодотворной для определения площадей и объемов. Таким путем Демокрит нашел объем конуса (метод, предвосхитивший интегральное исчисление). Но необходимо учесть, что для древних греков открытие пифагорейцев несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали не было связано с иррациональным числом. В существовании несоизмеримых отрезков грекам открывалась великая тайна, заключенная в непрерывности, одно из выражений диалектического противоречия, заключенного в непрерывности движения. Исследованием этого противоречия и возникающими в связи с этим парадоксами активно занимался Зенон Элейский. Евдокс в IV веке до н. э. создал теорию отношения отрезков, уже учитывающую существование несоизмеримых отрезков. Но осознать, что о т н о ш е н и е одного отрезка к другому есть ч и с л о древние греки так и не смогли.

Платон в своих диалогах в книге «Государство» активно пользуется понятиями рациональности и иррациональности.

Позже, уже в IV в до н. э. Федор Киренский доказал иррациональность чисел $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$, ..., а его ученик Теэтет доказал иррациональность чисел $\sqrt{k}$, если k не является точным квадратом какого-либо числа.

Рассмотрим доказательство иррациональности $\sqrt{3}$ (в современной символической форме).

Предположим, что существует рациональное число $\frac{p}{q}$ такое, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда $p^2 = 3q^2$, значит, p^2 делится на 3. Отсюда следует, что p делится на 3. Действительно, допустим, что это не так. Тогда либо $p = 3k + 1$, либо $p = 3k + 2$.

1. Пусть $p = 3k + 1$. Тогда $(3k+1)^2 = 3q^2$; $9k^2 + 6k + 1 = 3q^2$, т. е. $3(q^2 - 2k - 3k^2) = 1$, $k, p, q \in \mathbb{N}$ и 1 кратна 3, что ложно, так как $q^2 - 2k - 3k^2$ — целое число.
2. Пусть $p = 3k + 2$. Тогда $(3k+2)^2 = 3q^2$; $9k^2 + 12k + 4 = 3q^2$, т. е. $3(q^2 - 4k - 3k^2) = 4$, значит, 4 кратно 3, что тоже ложно.

Значит, p кратно 3, т. е. $p = 3m$, $m \in \mathbb{N}$. Но тогда $(3m)^2 = 3q^2$; $3m^2 = q^2$. Аналогично рассматриваются различные случаи для q^2, кратного 3. Приходим к тому, что q кратно 3. Увы, опять пришли к противоречию, так как $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь.

Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что существует рациональное число $\frac{p}{q}$, такое что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3$, ложно. Значит, $\sqrt{3}$ не является рациональным и относится к новому классу чисел, названному множеством иррациональных чисел.

В европейской математике понятие рациональных и иррациональных чисел сформировалось только к концу XVI века. Гораздо труднее было доказать, что числа π и e — числа иррациональные.

Известно, что π есть отношение длины окружности к ее диаметру. В 1674 году Г. Лейбниц установил одну из формул для $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

Однако этот ряд очень медленно сходится. Как показал Исаак Ньютон, чтобы с его помощью получить значение π с точностью до десятого знака после запятой, потребуется около 1000 лет. В 1704 году английский математик Джон Мечин пришел к иной формуле:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\right),$$

которая и до сих пор считается одной из самых лучших формул для приближенного вычисления числа π. Только в 1766 году немецкий математик Иоганн Ламберт доказал иррациональность числа π.

Несколько иначе обстояло дело с числом e, которое ввел в 1736 году Леонард Эйлер, определив его как $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. С использованием бинома Ньютона была получена формула

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Доказательство же иррациональности было получено только в 1873 году французским математиком Шарлем Эрмитом. Но, увы, для константы Эйлера $c = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ до сих пор доказательства ее рациональности или иррациональности нет.

Рассмотрим еще одну особенность иррациональных чисел. Так как любое иррациональное число можно окружить бесконечной последовательностью рациональных чисел с избытком и недостатком, то иррациональное число можно рассматривать как предел последовательности рациональных чисел, взятых с избытком и недостатком, если $\lim_{n\to\infty} a_n^- = \lim_{n\to\infty} a_n^+$. Автором такого подхода является Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс.

Пример.

$a_0^- = 1 < \sqrt{2} < 2 = a_0^+$ — с точностью до 10^0;

$a_1^- = 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 = a_1^+$ — с точностью до 10^{-1};

$a_2^- = 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 = a_2^+$ — с точностью до 10^{-2};

$a_3^- = 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 = a_3^+$ — с точностью до 10^{-3};

$a_4^- = 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 = a_4^+$ — с точностью до 10^{-4}.

Значит, $a_n^- < \sqrt{2} < a_n^+$ с точностью до 10^{-n},

a_n^+ — бесконечная последовательность рациональных чисел, взятая с избытком;

a_n^- — бесконечная последовательность рациональных чисел, взятая с недостатком.

Тогда $\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} a_n^+ = \lim_{n\to\infty} a_n^-$.

Математически строгое определение иррационального (действительного) числа, не опирающегося непосредственно на геометрию, было дано только в 70-х гг. XIX столетия немецкими математиками Вейерштрассом, Дедекиндом и Г. Кантором. Очевидно, что $\sqrt{2}$ можно рассматривать как «щель» между рациональными числами. Эту идею развивал Дедекинд, создав теорию «сечений». Стало ясно, что тогда иррациональные числа можно определить как бесконечные непериодические десятичные дроби. После этого стало возможным введение действительных, или реальных чисел. Числовая прямая стала всюду плотной, т. е. без «щелей», как отражение объединения множества всех бесконечных периодических десятичных дробей и множества всех бесконечных непериодических десятичных дробей.

Очевидно, что для множества всех действительных чисел (обозначается $\mathbb{R}$) придется заново определить действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на ноль). Естественно, действия надо определить так, чтобы основные их свойства сохранялись. Рассмотрим более или менее полную систему свойств действий множества всех действительных чисел.

Аксиомы множества всех действительных чисел

I. Свойства порядка (или правила сравнения чисел по величине).

I_1 Для любых двух действительных чисел a и b выполняется и притом только одно из трех соотношений $a=b$, $a<b$, $a>b$.

I_2 Для любых двух действительных чисел a и b, таких, что $a<b$, найдется такое действительное число c, что $a<c<b$.

I_3 Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$ (свойство транзитивности).

II. Свойства сложения и вычитания.

II_1 $a+b=b+a$ — коммутативность сложения;
II_2 $(a+b)+c=a+(b+c)$ — ассоциативность сложения;
II_3 $a+0=a$;
II_4 $a+(-a)=0$;
II_5 $a-b=a+(-b)$;
II_6 Если $a<b$, то $a+c<b+c$ для $\forall c\in\mathbb{R}$ — стабильность сложения.

III. Свойства умножения и деления.

III_1 $ab=ba$ — коммутативность умножения;
III_2 $(ab)c=a(bc)$ — ассоциативность умножения;
III_3 $a\cdot 1=a$;
III_4 $a\cdot 0=0$;
III_5 $-a=(-1)\cdot a$;
III_6 $a\cdot\frac{1}{a}=1$ $(a\neq 0)$;
III_7 $a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$;
III_8 $(a+b)c=ac+bc$ (дистрибутивность);
III_9 Если $a<b$ и c положительно, то $ac<bc$ (свойство стабильности умножения на положительное число).

IV. Архимедово свойство.
Каково бы ни было число $c>0$, найдется натуральное число $u>c$.

V. Свойство непрерывности действительных чисел.
Для любой системы вложенных отрезков

$$[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_{n-1};b_{n-1}]\supset[a_n;b_n]\supset\ldots,$$

длины которых стремятся к нулю при $n\to\infty$, существует, и притом единственная, точка, принадлежащая всем отрезкам $[a_n;b_n]$.

Примечание. Здесь под свойствами понимаются аксиомы.

2
Комплексные числа

Введение

В истории математики известны три способа изложения.

1. Риторический способ, при котором все рассуждения записываются только словами. Этим способом пользовалось большинство математиков до новой эры.
2. Синкопированный способ, при котором большинство математических выражений описываются словами, однако для часто встречающихся действий и понятий применяется символика. Известно, что таким способом написан трактат Диофанта Александрийского около 250 г. н. э., которым пользовались вплоть до середины XVII века в том числе и западноевропейские математики.
3. Символический способ, при котором математические выражения полностью записываются математическими символами, что стало возможным только благодаря работам французского математика Франсуа Виета (1540–1603 гг.) и полностью использовалось уже со второй половины XVII века, хотя частично такая символика применялась индийскими математиками в XII–XIII вв.

Итоговый труд Ф. Виета «Введение в аналитическое искусство» 1591 г. был первой из работ в области алгебры, написанный полностью в символической форме. Отметим, что Виет усовершенствовал методы алгебры в тригонометрии и очень подробно изложил систему применения алгебры к геометрии.

В связи с бурным развитием алгебры благодаря работам Ф. Виета вначале появилась формула решения квадратного уравнения общего вида $ax^2+bx+c=0$ в символической форме

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

где при $b^2-4ac<0$ возникали случаи квадратного корня из отрицательного числа. Долгое время считалось, что такие уравнения корней не имеют. Несколько ранее в работах итальянских ученых Сципиона дель Ферро (1465–1526), математика из Болоньи, Николо Тарталья (1499–1597), математика из Венеции, Джеронимо Кардано (1501–1576), врача и математика из Милана, появился способ решения кубического уравнения вида $x^3+px+q=0$, опубликованный в 1545 г. Кардано в книге «Великое искусство». Символическая формула решения появилась лишь в работах Виета:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

При $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{4}<0$ опять возникает необходимость извлекать квадратный корень из отрицательного числа, причем именно в этом случае все три корня действительные числа.

Пример. Уравнение $x^3-7x+6=0$, очевидно, имеет корни $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=1$, но при этом $x=\sqrt[3]{-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}$, где $q=6$ и $p=-7$.

Еще Эйлер писал в 1768 году в своем учебнике алгебры, что так как квадратный корень из отрицательного числа не может быть числом ни положительным, ни отрицательным, ни нулем, то он не может быть причислен к *возможным* числам. Значит, это число нового класса чисел, причем на *числовой* прямой ему уже места нет. Ясность в понимании природы новых чисел вида $a\pm\sqrt{-b}$ $(b>0)$ принесло лишь XIX столетие. Вопросы, возникающие в связи с необходимостью решать квадратные уравнения при $b^2-4ac<0$ и кубические уравнения с использованием формул Кардано, требовали расширения понятия числа за счет введения новых чисел и правил действий с ними, причем, по возможности, с сохранением старых свойств. Впервые вплотную подошел к определению новых чисел итальянский математик и инженер Рафаэль Бомбелли (1526–1572) в своей книге «Алгебра», предлагая действовать с корнями из отрицательных чисел по тем же правилам, что и с действительными числами. Эти числа позднее в работах немецкого математика

Карла Гаусса в 1831 году получили название «комплексных» (в переводе с латинского «составные»). Как уже отмечалось, на числовой прямой все места уже заняты рациональными и иррациональными числами, и новым числам там места нет.

Попытаемся подойти к этому вопросу с несколько иных позиций. Для этого введем понятие прямого произведения двух множеств.

Определение 1. *Прямым произведением* множеств A и B называется множество упорядоченных пар $(a;b)$, где $a \in A$ и $b \in B$, т. е. $A \times B = \{(a;b) \mid a \in A; b \in B\}$.

Под упорядоченностью пар понимается множество всех пар, для которых равенство пар $(a_1;b_1) = (a_2;b_2)$ возможно только если

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases},$$

т. е. в общем случае $(a_1;b_1) \neq (b_1;a_1)$ при $a_1 \neq b_1$.

Пример. $A = \{1;2;4;5\}$, $B = \{3;6\}$;

$$A \times B = \{(1;3);(1;6);(2;3);(2;6);(4;3);(4;6);(5;3);(5;6)\}.$$

Определение 2. *Декартовым квадратом* называется множество $M^2 = \{(a;b) \mid a \in M; b \in M\}$.

Пример. $M = \{-3;-2;1\}$;

$$M^2 = \{(-3;-3);(-3;-2);(-3;1);(-2;-2);$$
$$(-2;-3);(-2;1);(1;1);(1;-2);(1;-3)\}.$$

Пусть $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел. Значит, $\mathbb{C} = \{(a;b) \mid a;b \in \mathbb{R}\}$, т. е. множество всех пар $(a;b)$, где a и b — действительные числа.

Определение 3. Обозначим пары $(a;b) = z$ и $(-a;-b) = -z$. Назовем пару $(-a;-b)$ *симметричной* паре $(a;b)$.

Определение 4. Назовем пару $(0;0)$ *нулевой парой* и обозначим $(0;0) = 0$.

Определение 5. Пусть $z_1 = (a_1;b_1)$, $z_2 = (a_2;b_2)$, $z_3 = (a_3;b_3)$, тогда положим $z_1 + z_2 = z_3$ только если

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + a_2 \\ b_3 = b_1 + b_2 \end{cases}.$$

Таким образом, мы определили *действие сложения*, как покомпонентное.

Свойства сложения.

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность);
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность);
3) $z + (-z) = 0$.

Свойства доказываются на основании свойств действий над действительными числами.

Определение 6. Пусть $z_1 = (a_1; b_1)$, $z_2 = (a_2; b_2)$, $z_3 = (a_3; b_3)$, тогда положим $z_1 z_2 = z_3$, только если

$$\begin{cases} a_3 = a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ b_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{cases}.$$

Таким образом, мы определили *действие умножения.*

Свойства умножения.

1) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (коммутативность);
2) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (ассоциативность);
3) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (дистрибутивность).

Рассмотрим примеры реализации теории числовых пар. На самом деле, мы уже имели дело с числовыми парами, например, пары вида $\frac{p}{q}$, где $p; q \in \mathbb{Z}$ и $q \neq 0$, задают рациональные числа, т. е. $\frac{p}{q} = (p; q)$.

1) $(p_1; q_1) = (p_2; q_2) \to p_1 q_2 = p_2 q_1$ $\left(\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}\right)$;
2) $(p_1; q_1) + (p_2; q_2) \to (p_1 q_2 + p_2 q_1; q_1 q_2)$ $\left(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}\right)$;
3) $(p_1; q_1) \cdot (p_2; q_2) \to (p_1 p_2; q_1 q_2)$ $\left(\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}\right)$.

Примеры.

1) По определению $\frac{2}{3} = (2; 3)$; $\frac{4}{6} = (4; 6)$, но $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, так как $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, значит, $(2; 3) = (4; 6)$.
2) $(2; 3) + (4; 5) = (2 \cdot 5 + 4 \cdot 3; 3 \cdot 5) = (22; 15)$. Действительно,

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15} = (22; 15).$$

3) $(2; 3) \cdot (4; 5) = (2 \cdot 4; 3 \cdot 5) = (8; 15)$. Действительно, $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, что очевидно.

По сути дела, мы переосмыслили правила равенства, сложения и умножения рациональных чисел с точки зрения теории числовых пар. Здесь только сложение внешне кажется очень необычным, и условие равенства не такое очевидное.

Возможно рассмотреть множество всех упорядоченных пар, для которых действия определены по-другому.

Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные числа. Положим

1) $(a_1; b_1) = (a_2; b_2)$, только если $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$;
2) $(a_1; b_1) + (a_2; b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$;
3) $(a_1; b_1) \cdot (a_2; b_2) = (a_1 \cdot a_2; a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)$.

Такое множество упорядоченных пар действительных чисел называется множеством всех дуальных чисел, а любой элемент этого множества называется дуальным числом. Для любопытных и увлекающихся было бы полезно попытаться самостоятельно развить и «пощупать» на практике особенности таких чисел, аналогично тому, что мы будем рассматривать в дальнейшем.

Теперь рассмотрим примеры действия умножения на множестве $\mathbb{C}$:

1) $(a; 0) \cdot (0; 1) = (a \cdot 0 - 0 \cdot 1; a \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0; a)$, т. е.

$$(a; 0) \cdot (0; 1) = (0; a).$$

2) $(0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0)$, т. е.

$$(0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0).$$

Выясним, как надо определить действия вычитания и деления, чтобы они были обратными по отношению к действиям сложения и умножения. Мы имеем:

1) $z_2 - z_1 = z_3 \mid z_3 + z_1 = z_2$, т. е. $(a_3; b_3) + (a_1; b_1) = (a_2; b_2)$;

$$\begin{cases} a_2 = a_3 + a_1 \\ b_2 = b_3 + b_1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a_3 = a_2 - a_1 \\ b_3 = b_2 - b_1 \end{cases}.$$

2) $\frac{z_1}{z_2} = z_3 \mid z_1 = z_2 z_3$;

$$\begin{cases} a_1 = a_2 a_3 - b_2 b_3 \\ b_1 = a_2 b_3 + a_3 b_2 \end{cases}.$$

Таким образом, необходимо решить систему линейных уравнений с двумя неизвестными. Решим ее:

$$\begin{cases} a_1 = a_2a_3 - a_2a_3 \\ b_1 = a_2b_3 + a_3b_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \boxed{1} \cdot a_2 + \boxed{2} \cdot b_2 \\ \boxed{2} \cdot a_2 - \boxed{1} \cdot b_2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1a_2 + b_1b_2 = a_3(a_3^2 + b_2^2) \\ b_1a_2 - a_1b_2 = b_3(a_2^2 + b_2^2) \end{cases}; \quad \begin{cases} a_3 = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ b_3 = \dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{cases}.$$

Вот только теперь можно дать определение множества всех комплексных чисел, которые принято обозначать $\mathbb{C}$.

Определение. Множество $\mathbb{C} = \{(a;b) \mid a;b \in \mathbb{R}\}$ упорядоченных пар с определенным в нем следующим образом действиями

1) $(a_1;b_1) = (a_2;b_2) \to \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$;
2) $(a_1;b_1) + (a_2;b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$;
3) $(a_1;b_1) \cdot (a_2;b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + a_2b_1)$,

называется *множеством комплексных чисел.*

Поставим в соответствие каждому комплексному числу $(a;0)$ действительное число a; это записывается как $(a;0) = a$.

Очевидно, что

$$(a_1;0) + (a_2;0) = (a_1 + a_2;0);$$
$$(a_1;0) - (a_2;0) = (a_1 - a_2;0);$$
$$(a_1;0) \cdot (a_2;0) = (a_1a_2;0);$$
$$\frac{(a_1;0)}{(a_2;0)} = \left(\frac{a_1}{a_2};0\right), \quad a_2 \neq 0.$$

Теорема. Любое комплексное число z можно представить в виде

$$\boxed{(a;b) = (a;0) + (b;0) \cdot (0;1)}.$$

Обозначим $(0;1) = \mathrm{i}$. Так как $(a;0) = a$ и $(b;0) = b$, то

$$(a;b) = (a;0) + (b;0) \cdot (0;1) = a + b\mathrm{i}.$$

Это так называемая алгебраическая форма записи комплексного числа:

$$\boxed{(a;b) = a + b\mathrm{i}}.$$

Так как $(0;1)\cdot(0;1)=(-1;0)=-1$, то $\boxed{\mathrm{i}^2=-1}$, а значит, в множестве всех комплексных чисел есть число, квадрат которого отрицательное число. Таким образом, в множестве $\mathbb{C}$ разрешимы квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом $D=b^2-4ac<0$.

Рассмотрим действия над числами вида $z=a+b\mathrm{i}$.

1) $z_1+z_2=a_1+b_1\mathrm{i}+a_2+b_2\mathrm{i}=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}$;

2) $z_1z_2=(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})=a_1a_2+b_1a_2\mathrm{i}+a_1b_2\mathrm{i}+b_1b_2\mathrm{i}^2=$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\mathrm{i}, \quad (\mathrm{i}^2=-1).$$

Таким образом, если мы хотим сохранить свойство дистрибутивности, представляющее собой по сути правило умножения многочлена на многочлен, то становиться более понятным правило, определяющее действие умножения комплексных чисел.

Комплексное число i называется *мнимой единицей.* Для комплексного числа в алгебраической форме $z=a+b\mathrm{i}$ приняты обозначения

- $a=\mathrm{Re}(z)$ — реальная или действительная часть комплексного числа z;
- $b=\mathrm{Im}(z)$ — коэффициент при мнимой части комплексного числа z.

Комплексное число вида $z=b\mathrm{i}$ называется *мнимым числом.*

Какие же свойства мы потеряли при переходе от действительных чисел к комплексным?

В множестве комплексных чисел сравнение чисел по величине невозможно. Несколько позже, при рассмотрении геометрической интерпретации комплексного числа, это станет очевидно.

Дальнейшее развитие гиперкомплексных чисел связано с именем У. Р. Гамильтона (1805–1865), ирландского математика, чл.-кор. Петербургской АН, который первым дал точное формальное изложение теории комплексных чисел как частного случая числовых систем с несколькими единицами. Гамильтон построил так называемую *алгебру кватернионов* (чисел вида $(x;y;z;t)$ размерности 4) с четырьмя единицами $1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}$, связанными между собой таблицей умножения

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1,\quad \mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k},\quad \mathrm{j}\overline{\mathrm{k}}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i},\quad \mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j}.$$

Если для комплексных чисел свойства действий, а именно ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность сохраняются, то для алгебры кватернионов коммутативность теряется. Дальнейшее расширение размерности класса чисел, как доказал в своих исследованиях немецкий математик Ф. Г. Фробениус (1849–1917) приводит к потере и свойства ассоциативности.

Практикум 1

1. Выполните действия

1) $(2+3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$;

2) $\dfrac{(3-5\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{1+2\mathrm{i}}$;

3) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}+\dfrac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$;

4) $\dfrac{(1-\mathrm{i})^3-(1+\mathrm{i})^2}{2-\mathrm{i}}$;

5) $\dfrac{(2-\mathrm{i})^2+(2+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2}$.

2. Выясните, при каких $x, y \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

1) $3x-4y-(x-y)\mathrm{i}=3-2\mathrm{i}$;

2) $(2x+y\mathrm{i})+(3y-2x\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$;

3) $(y^2+1)\mathrm{i}+3=(y-2\mathrm{i})y-2y$;

4) $y^2-5(y-1)+4\mathrm{i}=x\mathrm{i}-1$;

5) $(2y-3x\mathrm{i})(2y+3x\mathrm{i})+4y\mathrm{i}=52-8\mathrm{i}$.

Решение практикума 1

1. Выполните действия

1) $(2+3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})=2\cdot3+3\cdot3\mathrm{i}-2\cdot2\mathrm{i}-3\mathrm{i}\cdot2\mathrm{i}=6+9\mathrm{i}-4\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2=$
$=6-6\cdot(-1)+5\mathrm{i}=12+5\mathrm{i}$. $(\mathrm{i}^2=-1)$

2) $\dfrac{(3-5\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{6-10\mathrm{i}+9\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{6+15-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{21-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$
[Так как $(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=1-4\mathrm{i}^2=5$, умножим числитель и знаменатель на $(1-2\mathrm{i})$.]
$=\dfrac{(21-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{21-\mathrm{i}-42\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1-4\mathrm{i}^2}=\dfrac{19-43\mathrm{i}}{1+4}=\dfrac{19-43\mathrm{i}}{5}$.

3) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}+\dfrac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})+(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{4-\mathrm{i}^2+9-\mathrm{i}^2}{6-5\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}=$
$=\dfrac{13+2}{5(1-\mathrm{i})}=\dfrac{15}{5(1-\mathrm{i})}\cdot\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{15(1+\mathrm{i})}{5(1-\mathrm{i}^2)}=$
$=\dfrac{15}{10}(1+\mathrm{i})=1{,}5+1{,}5\mathrm{i}$.

4) $\dfrac{(1-\mathrm{i})^3-(1+\mathrm{i})^2}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{1-3\mathrm{i}+3\cdot\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3-1-2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2-\mathrm{i}}=$
$(\mathrm{i}^3=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2=-\mathrm{i})$
$=\dfrac{1-3\mathrm{i}-3+\mathrm{i}-1-2\mathrm{i}+1}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{-2-4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\cdot\dfrac{2+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=$
$=\dfrac{-2\cdot2-2\cdot4\mathrm{i}-2\mathrm{i}-4\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2}=\dfrac{-10\mathrm{i}}{4+1}=-2\mathrm{i}$.

5) $\dfrac{(2-\mathrm{i})^2+(2+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2}=\dfrac{4-4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+8+12\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3}{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}=$
$=\dfrac{5+8\mathrm{i}-\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{5+7\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{(5+7\mathrm{i})\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}^2}=\dfrac{7\mathrm{i}^2+5\mathrm{i}}{2}=$
$=\dfrac{-7+5\mathrm{i}}{2}=-3{,}5+2{,}5\mathrm{i}$.

2. Выясните, при каких $x,y\in\mathbb{R}$ справедливы равенства

1) $3x-4y-(x-y)\mathrm{i}=3-2\mathrm{i}$.

Так как $z_1=z_2$ $(z_1=a_1+b_1\mathrm{i}, z_2=a_2+b_2\mathrm{i})$ только если

$$\begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases},$$

где $a_1 = 3x - 4y$, $a_2 = 3$ и $b_1 = -(x-y)$, $b_2 = -2\mathrm{i}$, то

$$\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3(y+2) - 4y = 3 \\ x = y + 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3y + 6 - 4y = 3 \\ x = y + 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = y + 2 \end{cases}; \quad (5; 3).$$

2) $(2x + y\mathrm{i}) + (3y - 2x\mathrm{i}) = 2 + \mathrm{i}$;
$2x + y\mathrm{i} + 3y - 2x\mathrm{i} = 2 + \mathrm{i}$; $(2x + 3y) + (y - 2x)\mathrm{i} = 2 + \mathrm{i}$, значит,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ y - 2x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ \boxed{1} + \boxed{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x + 3 \cdot \frac{3}{4} = 2 \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{8} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}; \quad \left(-\frac{1}{8}; \frac{3}{4}\right).$$

3) $(y^2 + 1)\mathrm{i} + 3 = (y - 2\mathrm{i})y - 2y$.
Можно действовать иначе, чем в предыдущих примерах. Перенесем выражение из правой части в левую. Приведем подобные члены, группируя отдельно слагаемые, не связанные с i, и отдельно — связанные с i. Получим выражение вида $a + b\mathrm{i} = 0$, которое верно только при условии

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Реализуем эту идею для решении данного примера. Имеем:

$$(y^2 + 1)\mathrm{i} + 3 - (y - 2\mathrm{i})y + 2y = 0;$$
$$(y^2 + 1)\mathrm{i} + 3 - y^2 + 2\mathrm{i}y + 2y = 0;$$
$$(y^2 + 1)\mathrm{i} + 2y\mathrm{i} + 3 + 2y - y^2 = 0;$$
$$-(y^2 - 2y - 3) + (y^2 + 2y + 1)\mathrm{i} = 0;$$
$$-(y - 3)(y + 1) + (y + 1)^2\mathrm{i} = 0.$$

Это равенство возможно, лишь если

$$\begin{cases} -(y - 3)(y + 1) = 0 \\ (y + 1)^2 = 0 \end{cases}; \quad y = -1.$$

4) $y^2 - 5(y-1) + 4\mathrm{i} = x\mathrm{i} - 1$.
Имеем:

$$y^2 - 5y + 5 + 1 + (4-x)\mathrm{i} = 0;$$
$$y^2 - 5y + 6 + (4-x)\mathrm{i} = 0,$$

что возможно только при условии

$$\begin{cases} y^2 - 5y + 6 = 0 \\ 4 - x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = 2 \end{array}\right. ; \\ x = 4 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} (4;3) \\ (4;2) \end{array}\right. .$$

5) $(2y - 3x\mathrm{i})(2y + 3x\mathrm{i}) + 4y\mathrm{i} = 52 - 8\mathrm{i}$.
Раскрывая скобки, получаем

$$4y^2 - 9x^2\mathrm{i}^2 + 4y\mathrm{i} = 52 - 8\mathrm{i};$$
$$4y^2 + 9x^2 + 4y\mathrm{i} = 52 - 8\mathrm{i};$$
$$\begin{cases} 4y^2 + 9x = 52 \\ 4y = -8 \end{cases}; \quad \begin{cases} 16 + 9x^2 = 52 \\ y = -2 \end{cases};$$
$$\begin{cases} x^2 = 36 \\ y = -2 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} (6;-2) \\ (-6;-2) \end{array}\right. .$$

Тренировочная работа 1

Вариант I.

1. Найдите $x, y \in \mathbb{R}$, если

1) $(x - 3iy) + (2y + 3ix) = 1 - 2i$;
2) $5x - 2y + (x + y)i = 4 + 5i$;
3) $x^2 - 5(x - 1) + 4i = yi - 1$;
4) $(x^2 + 1)i + 3 = x(x - 2i) - 2x$;
5) $(2x - 3yi)(2x + 3yi) + 4xi = 97 + 8i$.

2. Выполните действия:

1) $\dfrac{1 - i}{1 + i}$;
2) $(3 - 2i)(5 + 4i) - 7i + 1$;
3) $\dfrac{(1 - 2i)(2 + i)}{3 - 2i}$;
4) $\dfrac{(3 - 2i)(2 + i)}{(2 - 3i)(1 - i)}$;
5) $\dfrac{1 - 3i}{i - 2} + \dfrac{4i + 1}{3i - 1}$.

Вариант II.

1. Найдите $x, y \in \mathbb{R}$, если

1) $(x - 2iy) + (y + 2ix) = 2 - 3i$;
2) $9 + 2(x + 2y)i = 10i - 6y$;
3) $y^2 i + 3 + i = y^2 + 2iy + 2y$;
4) $\frac{1}{x} - 4yi = 4 + ix$;
5) $(x + y)^2 + 6 + xi = 5(x + y) + (y + 1)i$.

2. Выполните действия:

1) $\dfrac{4 - 5i}{2 + 3i}$;
2) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i\right) + 2i - 1$;
3) $\dfrac{2 - 3i}{(4 - i)(2 + 2i)}$;
4) $\dfrac{(2 + 3i)(2 - i)}{(3 - 2i)(1 + i)}$;
5) $\dfrac{1 + 3i}{i + 2} + \dfrac{4i - 1}{3i + 1}$.

Модуль комплексного числа, сопряженные комплексные числа

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = a + b\mathrm{i}$ называется неотрицательное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. $|a + b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. При $b = 0$ модуль числа равен $|a| = \sqrt{a^2}$, т. е. совпадает с обычным определением модуля действительного числа.

Определение. Пусть $z = (a; b)$ и $\overline{z} = (a; -b)$. Числа z и $\overline{z}$ называются взаимно *сопряженными*; имеют место равенства

$$\overline{a + b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}; \quad \overline{a - b\mathrm{i}} = a + b\mathrm{i}; \quad \overline{-a + b\mathrm{i}} = -a - b\mathrm{i}.$$

Свойства взаимно сопряженных комплексных чисел и модулей

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$;

3) $|z^n| = |z|^n$;

4) $\overline{(\overline{z})} = z$;

5) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

6) $|z| = |\overline{z}|$;

7) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$; $z_2 \neq 0$;

8) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

9) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

10) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; $z_2 \neq 0$;

11) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

В качестве упражнения докажем эти свойства.

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

$$z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}; \quad z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i};$$

а) $$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i}) = a_1a_2 + b_1b_2\mathrm{i}^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i} =$$
$$= a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i}\,;$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} =$$
$$= \sqrt{a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2} =$$
$$= \sqrt{\underline{a_1^2a_2^2} + \underline{\underline{b_1^2b_2^2}} + \underline{a_1^2b_2^2} + \underline{\underline{a_2^2b_1^2}}} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

б) $$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,; \; |z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,;$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Значит, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, ч. т. д.

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\mathrm{i}}{a_2 + b_2\mathrm{i}} = \frac{(a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i})}{a_2^2 - (b_2\mathrm{i})^2} =$$
$$= \frac{a_1a_2 - b_1b_2\mathrm{i}^2 + (a_2b_1 - a_1b_2)\mathrm{i}}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i};$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{(a_1a_2 + b_1b_2)^2 + (a_2b_1 - a_1b_2)^2}}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2b_2^2}}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}};$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Значит, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

3) $|z^n| = |z|^n$. Доказательство возможно провести:

а) методом математической индукции (попробуйте это сделать самостоятельно);

б) используя понятие тригонометрической формы комплексного числа (см. с. 55).

4) $\overline{(\overline{z})} = z$.
Пусть $z = a + bi$, тогда $\overline{z} = a - bi$, значит, $\overline{(\overline{z})} = a + bi$, т. е. $\overline{(\overline{z})} = z$, ч. т. д.

5) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
Пусть $z = a + bi$, тогда $\overline{z} = a - bi$, но

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2,$$

и $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, значит, $|z|^2 = a^2 + b^2$, отсюда следует, что $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

6) $|z| = |\overline{z}|$.
Пусть $z = a + bi$, тогда $\overline{z} = a - bi$.
И так как $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, то $|z| = |\overline{z}|$, ч. т. д.

7) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$; $z_2 \neq 0$.

а) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} i$;

б) $z_1 \cdot \overline{z_2} = (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 i^2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i =$
$= a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i$;

$$|z_2|^2 = (\sqrt{a_2^2 + b_2^2})^2 = a_2^2 + b_2^2;$$

в) $\dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$,
тогда $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

8) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.
Так как $z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$, то
$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) i$;
$\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$ и $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$;
$\overline{z_1} + \overline{z_2} = a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) i$, значит,
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, ч. т. д.
Аналогично доказывается равенство $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

9) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

а) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) i$;

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_2 b_1 + a_1 b_2) i;$$

б) $\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$ и $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$;
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_2 b_1 + a_1 b_2) i$, значит,
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, ч. т. д.

10) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; $z_2 \neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\mathrm{i}}{a_2 + b_2\mathrm{i}} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (a_2b_1 - a_1b_2)\mathrm{i}}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i};$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i};$$

$\overline{z_1} = a_1 - b_1\mathrm{i}$ и $\overline{z_2} = a_2 - b_2\mathrm{i}$;

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{a_1 - b_1\mathrm{i}}{a_2 - b_2\mathrm{i}} = \frac{(a_1 - b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i})}{(a_2 - b_2\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i})} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 - (a_2b_1 - a_1b_2)\mathrm{i}}{a_2^2 + b_2^2},$$

значит, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, ч. т. д.

11) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

а) $z_1 + z_2 = a_1 + b_1\mathrm{i} + a_2 + b_2\mathrm{i} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$;

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2};$$
$$|z_1 + z_2|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2;$$

б) $z_1 - z_2 = a_1 + b_1\mathrm{i} - (a_2 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)\mathrm{i}$;

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2};$$
$$|z_1 - z_2|^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2;$$

в) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$

$$= (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 =$$
$$= a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 + a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 +$$
$$+ b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2 = 2(a_1^2 + b_1^2) + 2(a_2^2 + b_2^2);$$

г) $|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$; $|z_1|^2 = a_1^2 + b_1^2$ и $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$; $|z_2|^2 = a_2^2 + b_2^2$;
$2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 2(a_1^2 + b_1^2) + 2(a_2^2 + b_2^2)$,
значит, $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$, ч. т. д.

Практикум 2

Примеры задач на комплексные числа.

1. При каких значениях m; n справедливо равенство

$$(m-3\mathrm{i})^2 = 16 + n\mathrm{i}?$$

2. При каких значениях x верно, что

$$(x-4\mathrm{i}) + (2+\mathrm{i}x^2) \in \mathbb{R}?$$

3. Найдите x, если $(1-2\mathrm{i}x)^3 + 11$ — число мнимое.

4. Найдите a и b, если $\dfrac{14-52\mathrm{i}}{1+b\mathrm{i}} = a - \mathrm{i}$.

5. Пусть $z = \dfrac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}}$, где $t \in \mathbb{R}$. При каких значениях t

а) $|z| = 1$;

б) $z = \dfrac{3-4\mathrm{i}}{5}$?

6. Доказать, что любое z, если $|z| = 1$ и $z \neq -1$, можно представить в виде $z = \dfrac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}}$, где $t \in \mathbb{R}$. Найдите все значения t, при которых $z = \dfrac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$.

7. При каких значениях m для числа $z = (m-1) + (m^2-4)\mathrm{i}$ справедливы равенства

а) $z = \overline{z}$;

б) $z = -\overline{z}$?

Решение практикума 2

1. При каких значениях m и n справедливо равенство

$$(m-3\mathrm{i})^2 = 16 + n\mathrm{i}?$$

Имеем:

$$m^2 - 6m\mathrm{i} + 9\mathrm{i}^2 = 16 + n\mathrm{i} \quad \text{или} \quad (m^2-25) - (6m+n)\mathrm{i} = 0;$$

$$\begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ 6m + n = 0 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 5 \\ n = -30 \end{cases} \\ \begin{cases} m = -5 \\ n = 30 \end{cases} \end{array}\right. .$$

2. При каких значениях x верно, что $(x-4\mathrm{i}) + (2+\mathrm{i}x^2) \in \mathbb{R}$? Имеем $x - 4\mathrm{i} + 2 + \mathrm{i}x^2 = x + 2 + (x^2-4)\mathrm{i}$. По условию коэффициент при мнимой части должен быть равным нулю: $x^2 - 4 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right., \quad \text{т. е.} \quad \begin{array}{l} z_1 = 4 \\ z_2 = 0 \end{array}.$$

3. Найдите x, если $(1-2\mathrm{i}x)^3 + 11$ — число мнимое. Имеем

$$1 - 6\mathrm{i}x + 12\mathrm{i}^2x^2 - 2^3\mathrm{i}^3x^3 + 11 = 12(1-x^2) + (8x^3-6x)\mathrm{i}.$$

По условию вещественная часть комплексного числа должна быть равна нулю:

$$1 - x^2 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.; \quad \begin{array}{l} z_1 = 2\mathrm{i} \\ z_2 = -2\mathrm{i} \end{array}.$$

4. Дано $\dfrac{14-52\mathrm{i}}{1+b\mathrm{i}} = a - \mathrm{i}$. Найти a и b. Находим:

$$\frac{(14-52\mathrm{i})(1-b\mathrm{i})}{1+b^2} = a - \mathrm{i}; \quad \frac{(14-52b)-(14b+52)\mathrm{i}}{1+b^2} = a - \mathrm{i};$$

$$\frac{14-52b}{1+b^2} - \frac{14b+52}{1+b^2}\mathrm{i} = a - \mathrm{i};$$

$$\begin{cases} \dfrac{14-52b}{1+b^2} = a \\ \dfrac{14b+52}{1+b^2} = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 14 - 52b = a + ab^2 \\ 52 + 14b = b^2 + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = \dfrac{14-52b}{1+b^2} \\ b^2 - 14b - 51 = 0 \end{cases}.$$

Приравнивая отдельно вещественные и мнимые части, получим

$$\begin{cases} a=\dfrac{14-52b}{1+b^2} \\ \left[\begin{array}{l} b=17 \\ b=-3 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{14-52(17)}{1+(17)^2}=-\dfrac{870}{290}=-3 \\ b=17 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{14-52\cdot(-3)}{1+3^2}=\dfrac{170}{10}=17 \\ b=-3 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-3 \\ b=17 \end{cases} \\ \begin{cases} a=17 \\ b=-3 \end{cases} \end{array}\right.$.

5. Пусть $z=\dfrac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}}$, где $t\in\mathbb{R}$. При каких значениях t

а) $|z|=1$?

Имеем:

$$z=\frac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}}=\frac{(1+t\mathrm{i})^2}{1+t^2}=\frac{1+2t\mathrm{i}-t^2}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{i},$$

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}=1.$$

Но последнее равенство есть тождество:

$$1-2t^2+t^4+4t^2=1+2t^2+t^4.$$

Значит, для $z=\dfrac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}}$ равенство $|z|=1$ выполняется для всех $t\in\mathbb{R}$.

б) $z=\dfrac{3-4\mathrm{i}}{5}$?

Учитывая предыдущий результат, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{3}{5} \\ -\dfrac{4}{5}=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 5-5t^2=3+3t^2 \\ -4-4t^2=10t \end{cases}; \quad \begin{cases} t^2=\dfrac{1}{4} \\ 2t^2+5t+2=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ (2t+1)(t+2)=0 \end{cases}; \quad t=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: а) при любых $t\in\mathbb{R}$; б) при $t=-\frac{1}{2}$.

6. Доказать, что любое z, если $|z|=1$ и $z\neq-1$, можно представить в виде $z=\dfrac{1+t\mathrm{i}}{1-t\mathrm{i}}$, где $t\in\mathbb{R}$.

Так как $z = a + bi$ и $|z| = 1$, т. е. $\sqrt{a^2+b^2} = 1$, то z можно представить в виде $\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} i$.

Поскольку $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ и $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, если $\cos\alpha \neq 0$ (т. е. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, значит, $z \neq -1$), то, полагая $\operatorname{tg}\alpha = t$, получим $\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} i = \frac{1-t^2+2ti}{1+t^2} = \frac{(1+ti)^2}{1+t^2} =$
$= \frac{(1+ti)^2}{1-(ti)^2} = \frac{(1+ti)^2}{(1-ti)(1+ti)} = \frac{1+ti}{1-ti}$, ч. т. д.

Найдите все t, при которых $z = \frac{1+ti}{1-ti} \in \mathbb{R}$.

Пусть $t = a + bi$. Тогда будем иметь $z = \frac{1+(a+bi)i}{1-(a+bi)i} = \frac{(1-b)+ai}{(1+b)-ai} =$
$= \frac{((1-b)+ai)((1+b)+ai)}{(1+b)^2+a^2} = \frac{1-b^2-a^2+(a(1+b)+a(1-b))i}{(1+b)^2+a^2} =$
$= \frac{1-b^2-a^2}{(1+b)^2+a^2} + \frac{2a}{(1+b)^2+a^2} i$. Видно, что $z \in \mathbb{R}$ только при $a = 0$, значит, $t = bi$.

Итак, только при $t = bi$ верно, что $z = \frac{1+ti}{1-ti} \in \mathbb{R}$.

7. При каких значениях m для числа $z = (m-1) + (m^2-4)i$ справедливы равенства

а) $z = \overline{z}$;

б) $z = -\overline{z}$?

Пусть $z = (m-1) + (m^2-4)i$, тогда $\overline{z} = (m-1) - (m^2-4)i$.

а) $z = \overline{z}$,
значит, $\underline{(m-1)} + (m^2-4)i = \underline{(m-1)} - (m^2-4)i 2(m^2-4)i = 0$,
т. е. $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

б) $z = -\overline{z}$,
значит, $(m-1) + \underline{(m^2-4)i} = -((m-1) - \underline{(m^2-4)i}) 2(m-1) = 0$,
т. е. $m = 1$.

Ответ: Для комплексного числа $z = (m-1) + (m^2-4)i$

а) $z = \overline{z}$ при $m = 2$ или $m = -2$;

б) $z = -\overline{z}$ при $m = 1$.

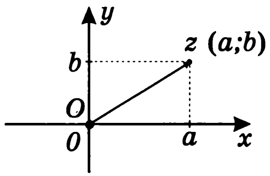
Примечание. Для любого комплексного числа z

а) $z = \overline{z}$, если $\operatorname{Im}(z) = 0$;

б) $z = -\overline{z}$, если $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

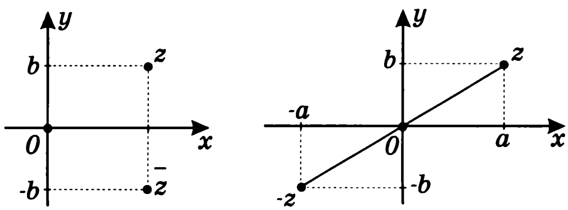
Как известно, можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой, которые называются числовой осью. То есть каждому действительному числу сопоставляется только одна точка прямой и наоборот, каждой точке прямой соответствует единственное действительное число. Поэтому каждое комплексное число $(a; 0)$ взаимно однозначно сопоставляется с точкой a на числовой оси Ox и каждое комплексное число $(0; b)$ взаимно однозначно сопоставляется с точкой b на числовой оси Oy. Естественно, тогда каждому комплексному числу $(a; b)$ взаимно однозначно сопоставляется точка $z(a; b)$ на обычной координатной плоскости xOy, которая тогда называется *комплексной плоскостью.* Таким образом, комплексному числу $z = a + b\mathrm{i}$ сопоставляется точка $z(a; b)$. Ось Oy называется *мнимой осью*; на ней располагаются все мнимые числа $z = b\mathrm{i}$.



Комплексное число можно также представить направленным отрезком (вектором) $\overrightarrow{Oz}$, где точка O — начало вектора с координатами $(0; 0)$, а конец вектора z — есть точка $z(a; b)$. Тогда множество всех комплексных чисел можно представить как множество всех радиус-векторов с началом в начале координат.[1]

Свойства геометрической интерпретации комплексных чисел

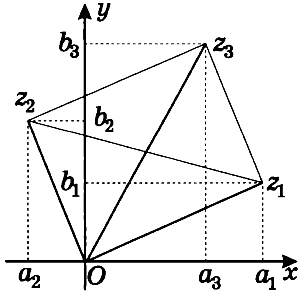
1. $|\overrightarrow{Oz}| = |z|$. Действительно, $|\overrightarrow{Oz}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ по теореме Пифагора, а с другой стороны, $z = a + b\mathrm{i}$ и $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. z и $\overline{z}$ симметричны относительно оси Ox; $z = a + b\mathrm{i}$ и $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.



[1]Впервые векторную интерпретацию комплексных чисел дал датский математик Вессель (1745–1818) в 1799 г. в книге «Об аналитическом представлении направлений».

3. z и $-z$ центрально-симметричны относительно точки $O(0;0)$; $z = a + b\mathrm{i}$ и $-z = -a - b\mathrm{i}$ (правый рисунок выше).

4. Сложение комплексных чисел в векторной форме подчиняется правилу параллелограмма (аналогично правилу сложения двух векторов). Действительно, $|\overrightarrow{Oz_1}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$; $|\overrightarrow{Oz_2}| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$; $|\overrightarrow{Oz_3}| = \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$; $\overrightarrow{z_1 z_2} = \overrightarrow{Oz_2} - \overrightarrow{Oz_1}$; $|\overrightarrow{z_1 z_2}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$, так как $|\overrightarrow{z_1 z_2}|$ можно рассматривать как расстояние между точками z_1 и z_2.



По правилу параллелограмма (сумма квадратов всех его сторон равна сумме квадратов его диагоналей)

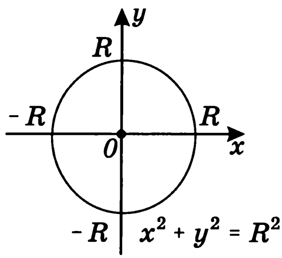
$$|\overrightarrow{Oz_3}|^2 = 2|\overrightarrow{Oz_2}|^2 + 2|\overrightarrow{Oz_1}|^2 - |\overrightarrow{z_2 z_1}|^2;$$

$$|\overrightarrow{Oz_3}| = \sqrt{2(a_2^2 + b_2^2) + 2(a_1^2 + b_1^2) - (a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(a_2 + a_1)^2 + (b_2 + b_1)^2} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2},$$

т. е. $a_3 = a_1 + a_2$; $b_3 = b_1 + b_2$, что означает простое покоординатное сложение. Значит, сложение комплексных чисел в векторной форме происходит по правилу параллелограмма.

5. $|\overrightarrow{z_1 z_2}| = |z_2 - z_1|$ — расстояние между точками z_2 и z_1.
Пусть $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ и $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$. $z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)\mathrm{i}$, тогда $|z_2 - z_1| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$, но $|\overrightarrow{z_1 z_2}|$ есть расстояние между точками $z_1(a_1; b_1)$ и $z_2(a_2; b_2)$.

6. Рассмотрим множество всех точек плоскости, для которых $|z| = R$ $(R > 0)$. Так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$, то $x^2 + y^2 = R^2$. Значит, все комплексные числа, для которых $|z| = R$, находятся на окружности с центром $(0;0)$ и радиусом R.
Отметим, что множество всех точек плоскости, определенных уравнением $|z - z_0| = R$, есть окружность с центром в точке z_0. Если $z_0(a;b)$, тогда $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.



Первым геометрическую интерпретацию комплексных чисел ввел в 1806 г. швейцарский математик Жан Роберт Арган (1768–1822); модуль комплексного числа появился в его работах 1814–1815 гг.

Практикум 3

Примеры геометрической интерпретации задач на комплексные числа.

Заштриховать заданное множество точек комплексной плоскости.

1. $|a+b\mathrm{i}|<1$.

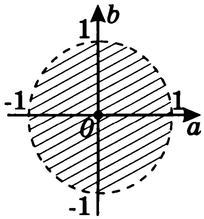
Данное неравенство эквивалентно неравенству

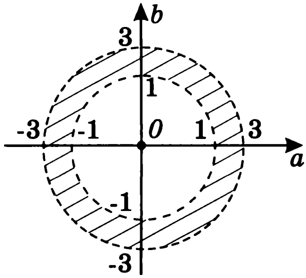
$$\sqrt{a^2+b^2}<1 \quad \text{или} \quad a^2+b^2<1.$$

Отметим, что

а) уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ определяет окружность радиуса R с центром в $(\cdot)O(a;b)$;

б) $x^2+y^2<1$ — круг без контура окружности.



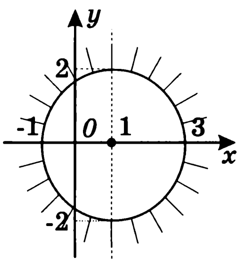


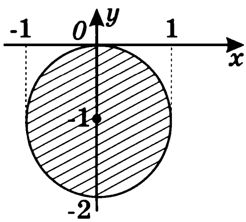
2. $1<|a+b\mathrm{i}|<3$.

3. $|z-1|\geqslant 2$.

Имеем:

$$|(x-1)+y\mathrm{i}|\geqslant 2 \quad \text{или} \quad (x-1)^2+y^2\geqslant 2^2.$$





Отметим, что здесь заштриховываются все точки плоскости вне внутренней части круга, включая и саму окружность.

4. $|z+\mathrm{i}| \leqslant 1$.
Имеем:

$$|x+(y+1)\mathrm{i}| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad x^2+(y+1)^2 \leqslant 1.$$

5. $|\sqrt{2x+y}+\mathrm{i}\sqrt{x+2y}| = \sqrt{3}$.
Мы имеем:

$$\left|\sqrt{2x+y}+\mathrm{i}\sqrt{x+2y}\right| = \sqrt{(\sqrt{2x+y})^2+(\sqrt{x+2y})^2} = \\ = \sqrt{2x+y+x+2y},$$

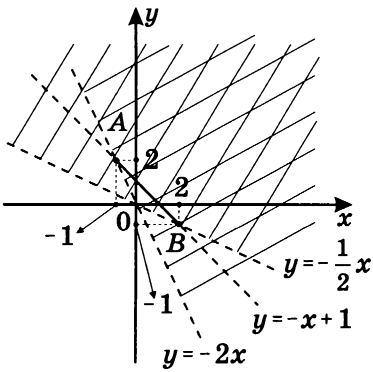
причем, корни существуют, если

а) $2x+y \geqslant 0$ для $\sqrt{2x+y}$;
б) $x+2y \geqslant 0$ для $\sqrt{x+2y}$.

Тогда,

$$\begin{cases} 2x+y+x+2y=3 \\ y \geqslant -2x \\ y \geqslant -\dfrac{1}{2}x \end{cases};$$

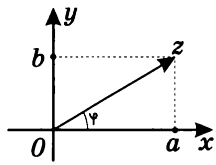
$$\begin{cases} y=-x+1 \\ y \geqslant -2x \\ y \geqslant -\dfrac{1}{2}x \end{cases}$$



Ответ: $[AB]$, где $A(-1;2)$, а $B(2;-1)$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Известно, что точку плоскости можно задать радиус-вектором, т. е. длиной вектора и направлением вектора: $|\overrightarrow{Oz}| = |z|$; φ — угол между вектором $\overrightarrow{Oz}$ и положительным направлением оси $0x$, отсчитываемый против часовой стрелки, называется *главным*, если $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Главный угол φ называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\varphi = \arg z$. Множество всех значений аргумента комплексного числа обозначается $\operatorname{Arg} z$: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



Таким образом, для комплексного числа $z = (a; b)$ $(z \neq 0)$ имеем

$$\begin{cases} a = |\overrightarrow{0z}| \cos\varphi = |z| \cos\varphi \\ b = |\overrightarrow{0z}| \sin\varphi = |z| \sin\varphi \end{cases}.$$

Выясним, как можно найти $\arg z = \varphi$ для комплексного числа z в алгебраической форме $z = a + b\mathrm{i}$. Мы имеем $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, поэтому

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{i}\right) = |z|\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{i}\right).$$

Ясно, что

$$-1 \leqslant \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1.$$

Кроме того,

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{i} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi.$$

Рассмотрим возможные ситуации.

1. Если $a \neq 0$, то $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, где $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.
2. Если $a = 0$, то $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$, тогда $b = 1$ при $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, и $b = -1$ при $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.
3. Так как равенство $z = 0$ возможно только при $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$, то число $z = 0$ тригонометрической формы не имеет.

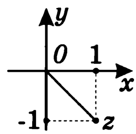
Таким образом,

$$\boxed{z = |z|(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)}$$

есть тригонометрическая форма комплексного числа при $\varphi \in [0; 2\pi)$ и $z \neq 0$.

Пример 1. Представить комплексное число $1 - \mathrm{i} = z_1$ в тригонометрической форме.

Угол φ лежит в 4-й четверти, о чем говорят координаты точки $z_1(1; -1)$. Имеем: $|z_1| = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Поэтому



$$z_1 = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right).$$

Значит, $\left\{\begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}$. (Необходимо, чтобы $\varphi \in [0; 2\pi)$.)

Итак, $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i} \sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

Пример 2. Представить комплексное число $z_2 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ в тригонометрической форме.

Угол φ лежит во 2-й четверти. Имеем: $|z_2| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$, поэтому

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right).$$

Значит, $\left\{\begin{array}{l} \cos \varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Таким образом, $-1 + 3\mathrm{i} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i} \sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Практикум 4

1. Выполните действия:

1) $i^3 + i^4 + i^5 + i^6 - i^2 - i^7 - i^9$;

2) $(i^2 + i^4 + i^6)(i + i^3 + i^5)$;

3) $\dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$.

2. Найдите x и y из системы уравнений

$$\begin{cases} (1 + i)y + 0{,}5(1 - i)x = 0{,}5(-1 + i) \\ (2 - 2i)y + 2x = 4 \end{cases}.$$

3. Вычислите:

1) $(1 - i)^5$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$;

3) $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^3$.

4. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

1) $3i$;

2) $-\sqrt{3} + i$;

3) 2;

4) $\dfrac{1}{3i - 3}$;

5) $1 - \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

Решение практикума 4

1. Выполните действия

1) $i^3+i^4+i^5+i^6-i^2-i^7-i^9=$
$=i\cdot i^2+(i^2)^2+i\cdot(i^2)^2+(i^2)^3-i^2-i(i^2)^3-(i^2)^4\cdot i=$
$=-i+(-1)^2+i(-1)^2+(-1)^3-(-1)-i(-1)^3-(-1)^4\cdot i=$
$=-i+1+i-1+1+i-i=1.$

2) $(i^2+i^4+i^6)(i+i^3+i^5)=(-1+1-1)(i-i+i)=(-1)i=-i.$

3) $\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{(\sqrt{6}+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=$
$=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}+i\cdot 3-\sqrt{6}i-\sqrt{3}i^2}{3-i^2}=\dfrac{3\sqrt{2}+3i-\sqrt{6}i+\sqrt{3}}{3+1}=$
$=\dfrac{(3\sqrt{2}+2)+(3-\sqrt{6})i}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}+2}{4}+\dfrac{3-\sqrt{6}}{4}i.$

2. Найдите x и y из системы уравнений

$$\begin{cases}(1+i)y+0{,}5(1-i)x=0{,}5(-1+i)\\(2-2i)y+2x=4\end{cases};\quad\begin{cases}\boxed{1}\cdot 2(1-i)\\\boxed{2}\cdot(1+i)\end{cases};$$

$$\begin{cases}2(1-i^2)y+(1-i)^2x=-(1-i)^2\\2(1-i^2)y+2(1+i)x=4(1+i)\end{cases}$$

$(1-i^2=1+1=2,\ (1-i)^2=1-2i+i^2=-2i)$, тогда

$$\begin{cases}4y-2ix=2i\\4y+2(1+i)x=4(1+i)\end{cases};\quad\begin{cases}\boxed{1}:2\\\boxed{2}:2\end{cases};$$

$$\begin{cases}2y-ix=i\\2y+(1+i)x=2(1+i)\end{cases};\quad\boxed{2}-\boxed{1};$$

$2y-2y+(1+i)x+ix=2+2i-i$; $(1+2i)x=2+i$; $x=\dfrac{2+i}{1+2i}$, но
$\dfrac{2+i}{1+2i}=\dfrac{(2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{2+i-4i-2i^2}{1-4i^2}=\dfrac{4-3i}{5}$,
значит, $x=\dfrac{4-3i}{5}$, тогда $2y-i\cdot\dfrac{4-3i}{5}=i$; $10y-4i+3i^2=5i$;
$10y=9i+3$; $y=\dfrac{3+9i}{10}$.

Итак, $\begin{cases}x=0{,}8-0{,}6i\\y=0{,}3+0{,}9i\end{cases}.$

3. Вычислите:

1) $(1-i)^5$.

$$(1-i)^5=(1-i)^2\cdot(1-i)^3=(1-2i+i^2)(1-3i+3i^2-i^3)=$$
$$=-2i(1-3-3i+i)=-2i(-2-2i)=-4+4i.$$

Пользуясь треугольником Паскаля, вспомним коэффициенты разложения бинома Ньютона:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Для $a=1$ и $b=-i$ имеем:

$$(1-i)^5=1^5-5\cdot1^4\cdot i+10\cdot1^3\cdot i^2-10\cdot1^2\cdot i^3+5\cdot1\cdot i-i^5=$$
$$=1-5i-10+10i+5-i=-4+4i.$$

2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$.

По формуле бинома

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

следовательно, имеем

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3+$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4=\frac{9}{16}-\frac{4\cdot9}{16}i+6\cdot\frac{9}{16}i^2-4\cdot\frac{9}{16}i^3+\frac{9}{16}i^4=$$
$$=\frac{9}{16}\big(1-4i+6(-1)-4(-i)+1\big)=\frac{9}{16}(-4)=-\frac{9}{4}=-2{,}25.$$

3) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.

Домножая числитель и знаменатель дроби на $1+i$, получаем

$$\left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^3=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^3=\left(\frac{2i}{2}\right)^3=i^3=-i.$$

4. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

1) $3i$.

Так как $i=0+1\cdot i$, т. е. $\begin{cases}\cos\varphi=0\\ \sin\varphi=1\end{cases}$, то $\varphi=\frac{\pi}{2}$,

значит, $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$. Отсюда

$$3i=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

2) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

Имеем: $\left|-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2$,

следовательно, $-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$. Поэтому

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\[2mm] \sin\varphi=\dfrac{1}{2}\end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3};\quad \varphi=\frac{5\pi}{6}.$$

Значит, $-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

3) 2.

Так как $1=1+0\cdot\mathrm{i}$, т. е. $\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=1\\ \sin\varphi=0\end{array}\right.$, то $\varphi=0$.

Поэтому $1=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0$, значит, $2=2(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$.

4) $\dfrac{1}{3\mathrm{i}-3}$.

Имеем:

$$\frac{1}{3\mathrm{i}-3}=\frac{1}{3}\frac{1\cdot(-1-\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}=\frac{1}{3}\frac{-1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2}=\frac{1}{6}(-1-\mathrm{i}).$$

Далее, $|-1-\mathrm{i}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$, и, значит,

$-1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)$. Поэтому

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\[2mm] \sin\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=1;\quad \varphi=\frac{5\pi}{4}.$$

Значит, $\dfrac{1}{3\mathrm{i}-3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

5) $1-\cos\dfrac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{5}=$

$$\boxed{1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha},\quad \boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=2\sin^2\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cdot 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{5}\left(\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}\right).$$

Так как $\sin\frac{\pi}{5}>0$, то это и есть тригонометрический вид комплексного числа, т. е.

$$1-\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}\right).$$

Тренировочная работа 2

Вариант I.

1. Выполните действия:

1) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$;

2) $(i + i^{11} + i^{21})(i^{31} + i^{41} + i^{51})$;

3) $\dfrac{-\sqrt{3} + i\sqrt{6}}{-1 + i\sqrt{3}}$.

2. Найдите x и y из системы уравнений

$$\begin{cases} ix - 2y = -i \\ (1+i)x - 2iy = 3 + i \end{cases}.$$

3. Вычислите:

1) $\dfrac{-((-3i)(2-4i) - (2+4i)3i)^2}{(1-i)(1+i)^2 - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i - \frac{1+2i}{1-2i}\right) - 4i}$;

2) $\dfrac{\left|\frac{|5-i|^2}{5-i} - i + (5+i)i^{125} - (2+3i)\right|}{\left|\left(\frac{|3+4i|^2}{3-4i} - 4i\right)(i-4) + 10 - 5i\right|}$;

3) $(1+i)^6$;

4) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$;

5) $\left(\dfrac{2+i\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}$;

6) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^7-1}\right)^2$.

4. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

1) 3;

2) $-2 + 2\sqrt{3}i$;

3) $2i$;

4) $\dfrac{2}{1-i}$;

5) $1 + \cos\dfrac{8\pi}{7} + i\sin\dfrac{8\pi}{7}$.

Вариант II.

1. Выполните действия:

1) $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^5$;

2) $(\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^{13}+\mathrm{i}^{23})(\mathrm{i}^5+\mathrm{i}^{15}+\mathrm{i}^{25})$;

3) $\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$.

2. Найдите x и y из системы уравнений

$$\begin{cases}(1-\mathrm{i})x-0{,}5(1+\mathrm{i})y=0{,}5(-1+\mathrm{i})\\(-2+2\mathrm{i})x-2y=-4\end{cases}.$$

3. Вычислите:

1) $\dfrac{(3\mathrm{i}(2+4\mathrm{i})+(2-4\mathrm{i})(-3\mathrm{i}))^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^2-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}+\frac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right)+4\mathrm{i}}$;

2) $\dfrac{\left|\frac{|5+\mathrm{i}|^2}{5+\mathrm{i}}+\mathrm{i}-(5-\mathrm{i})\mathrm{i}^{125}-(2-3\mathrm{i})\right|}{\left|\left(\frac{|3-4\mathrm{i}|^2}{3+4\mathrm{i}}+4\mathrm{i}\right)(\mathrm{i}+4)-10-5\mathrm{i}\right|}$;

3) $(1-\mathrm{i})^6$;

4) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^4$;

5) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4$;

6) $\left(\dfrac{4+\mathrm{i}^7}{3-\mathrm{i}^5}\right)^2$.

4. Представьте комплексное число в тригонометрической форме

1) $6\mathrm{i}$;

2) $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$;

3) 4;

4) $\dfrac{1}{2\mathrm{i}+2}$;

5) $1+\cos\dfrac{6\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{6\pi}{5}$.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

Теорема. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$; $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \mathrm{i}^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ &\qquad + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\big) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &\qquad + \mathrm{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\big) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big). \end{aligned}$$

Вывод: $\boxed{z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)}$.

При перемножении комплексных чисел в тригонометрической форме модули чисел перемножаются, а аргументы складываются.

Следствие 1. При $z_1 = z_2$; $z_1 \cdot z_1 = z_1^2$, где $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, тогда $z_1^2 = |z_1|^2(\cos 2\varphi_1 + \mathrm{i}\sin 2\varphi_1)$.

Рассуждая аналогично, с использованием метода математической индукции получим так называемую теорему Муавра[2]

$$\boxed{z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)}.$$

При возведении комплексного числа в n-ю степень модуль комплексного числа возводится в n-ю степень, а аргумент умножается на n.

Примеры использования теоремы Муавра. Выполните действия, используя тригонометрическую форму числа.

1. $(1 - \mathrm{i})(-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}) =$

$$\left[\begin{array}{ll} 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{4}\Big), & \text{см. пример 1 на стр. 48;} \\ -1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\Big(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\Big), & \text{см. пример 2 на стр. 48} \end{array}\right]$$

$$= \sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big) \cdot 2\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\Big) =$$

[2] Абрахам де Муавр, английский математик, член Лондонского Королевского общества, а также член Парижской и Берлинской АН академии наук. В 1707 г. вывел правило возведения в n-ю степень и извлечение корня n-й степени для комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме.

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

2. $(1-\mathrm{i})^8=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^8=2^4(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi)=2^4\cdot 1=16$.
3. $(1+\mathrm{i})^6=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^6=8(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2})=-8\mathrm{i}$.
4. $|z^n|=|z|^n$ (см. стр. 35).

Приведем доказательство последней формулы (рассмотреть его имеет смысл после введения понятия тригонометрической формы комплексного числа и теоремы Муавра).

Пусть $z=x+y\mathrm{i}$. Тогда $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ и $|z|^n=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n$. Имеем: $z=|z|(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, где $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Значит,

$$|z^n|=\big||z|^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)\big|=|z|^n|\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi|=$$
$$=\left(z\neq 0,\quad \big||z|^n\big|=|z|^n\right)=|z|^n\sqrt{\cos^2 n\varphi+\sin^2 n\varphi}=|z|^n.$$

Итак, $|z^n|=|z|^n$, ч. т. д. ($|\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi|=\sqrt{\cos^2 n\varphi+\sin^2 n\varphi}=1$)

Самостоятельно докажите формулу деления комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

Вывод: $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big)}$.

При делении комплексных чисел в тригонометрической форме модули комплексных чисел делятся, а их аргументы вычитаются.

Примечание. Пусть $\arg z_1$, $\arg z_2$, $\arg z_3$, ..., $\arg z_n$ — аргументы комплексных чисел z_1, z_2, z_3, ..., z_n. Тогда можно доказать, что

$$\arg z_1+\arg z_2+\arg z_3+\ldots+\arg z_n=\arg(z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\ldots\cdot z_n).$$

Кроме того, $\arg z_1-\arg z_2=\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ и $\arg z_1^n=n\arg z_1$. Характерно, что такими же свойствами обладают логарифмы:

$$\log_a(\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\varphi_3\cdot\ldots\cdot\varphi_n)=\log_a\varphi_1+\log_a\varphi_2+\log_a\varphi_3+\ldots+\log_a\varphi_n;$$
$$\log_a\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)=\log_a\varphi_1-\log_a\varphi_2;\quad \log_a\varphi_1^n=n\log_a\varphi_1.$$

Здесь $\varphi_1=\arg z_1$, $\varphi_2=\arg z_2$, ..., $\varphi_n=\arg z_n$.

Практикум 5

Выполните действия:

1. $3\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{20} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{20}\right)$;

2. $2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{5}\right) : \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{20}\right)$;

3. $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}}$;

4. $(3 - \sqrt{3}\mathrm{i})\left(\cos\frac{5\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

5. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{12}}{1 - \mathrm{i}}$;

6. $\dfrac{(\sqrt{3} + \mathrm{i})^5}{(\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i})^4}$;

7. $(\sqrt{6} - \sqrt{2}\mathrm{i})^6$;

8. $\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)^8$;

9. $\left(1 + \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^6$;

10. $\left(1 - \sin\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}\right)^{10}$.

Решение практикума 5

Выполните действия:

1. $3\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{20} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{20}\right) =$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)}$$

$$= 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20}\right)\right) =$$

$$= 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}(1 + \mathrm{i});$$

2. $2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{5}\right) : \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{20}\right) =$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5} - \frac{7\pi}{20}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{5} - \frac{7\pi}{20}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i};$$

3. $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}}$.

Так как выражения в числителе и знаменателе тригонометрической формой комплексного числа не являются, то для них теорему о делении применить нельзя. Представим выражения в числителе и знаменателе в тригонометрической форме комплексного числа. Будем иметь,

$$\cos\frac{5\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) =$$
$$= -\cos\frac{3\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8} = -\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

Аналогично,

$$\cos\frac{\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right) =$$
$$= -\left(\cos\frac{7\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{8}\right).$$

Тогда

$$\frac{\cos\frac{5\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}} = \frac{-\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right)}{-\left(\cos\frac{7\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{8}\right)} = \frac{\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{7\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{8}} =$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{7\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{7\pi}{8}\right) =$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}.$$

Внимание! При делении можно получить число не являющееся тригонометрической формой комплексного числа. На результат это не влияет.

4. $(3 - \sqrt{3}\mathrm{i})\left(\cos\frac{5\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ $\boxed{|x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

а) $3 - \sqrt{3}\mathrm{i} =$

$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

б) $\cos\frac{5\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12} =$

$$= \cos\left(\pi - \frac{7\pi}{12}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{12}\right) =$$
$$= -\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

тогда $(3 - \sqrt{3}\mathrm{i})\left(\cos\frac{5\pi}{12} - \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right) =$

$$= -2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right) =$$
$$= -2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{7\pi}{12}\right)\right) =$$
$$= -2\sqrt{3}\left(\cos\frac{27\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{27\pi}{12}\right) = -2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$- \sqrt{6}(1 + \mathrm{i}).$$

5. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{12}}{1 - \mathrm{i}}.$

а) $\sin\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) =$

$$= \cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12},$$

теперь это тригонометрическая форма комплексного числа;

б) $|1 - \mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, поэтому

$$1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Значит,

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{12}}{1-\mathrm{i}}=\frac{\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{7\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{7\pi}{4}\right)\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\mathrm{i}.$$

6. $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})^4}$.

а) $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

$$(\sqrt{3}+1)^5=2^5\left(\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right);$$

б) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$$(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\mathrm{i})^6=2^6\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$
$$=2^6(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=-64.$$

Значит, $\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})^4}=\dfrac{2^5\left(\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right)}{-64}=$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-\mathrm{i}).$$

7. $(\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i})^6$.

$$\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right),$$
$$(\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i})^6=\left(2\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(6\cdot\frac{11\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(6\cdot\frac{11\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=2^9(\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi))=-2^9=-512.$$

8. $\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)^8.$

$$\left|\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{3}}=\frac{4}{3};$$

$$\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{4}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right);$$

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right)^8=\left(\frac{4}{3}\right)^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{5\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(8\cdot\frac{5\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)^8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^8\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=$$

$$=-\frac{2^{15}}{3^8}(1+\sqrt{3}\mathrm{i}).$$

9. $\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^6.$

Выражение $1+\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$ не является тригонометрической формой комплексного числа. Пользуясь формулой $1+\cos 2\alpha= 2\cos^2\alpha$, получим

$$1+\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=2\cos^2\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=$$

$$=2\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}.$$

Тогда $\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^6=\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^6=$

$$=\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi=1.$$

10. $\left(1-\sin\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}\right)^{10}.$

Выражение $1-\sin\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}$ не является тригонометрической формой комплексного числа. Пользуясь формулой $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$, получим

$$1-\sin\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{4}=1-\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=2\sin^2\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=2\sin\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{8}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\right)=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right).$$

Значит,

$$\left(1-\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}\right)^{10}=\left(2\sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)\right)^{10}=$$
$$=2^{10}\sin^{10}\frac{\pi}{8}\left(\cos\left(10\cdot\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(10\cdot\frac{3\pi}{8}\right)\right)=$$
$$=2^{10}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\right)^{10}\left(\cos\frac{15\pi}{4}+i\sin\frac{15\pi}{4}\right)=$$
$$=2^{10}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^{5}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=(2-\sqrt{2})^5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right);$$

$$(2-\sqrt{2})^5=2^5-5\cdot2^4\sqrt{2}+10\cdot2^3(\sqrt{2})^2-10\cdot2^2(\sqrt{2})^3+$$
$$+5\cdot2(\sqrt{2})^4-(\sqrt{2})^5=32-80\sqrt{2}+160-80\sqrt{2}+40-4\sqrt{2}=$$
$$=232-164\sqrt{2};$$
$$(2-\sqrt{2})^5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=(232-164\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=$$
$$=(116\sqrt{2}-82)(1-i).$$

Тренировочная работа 3

Вариант I. Выполните действия:

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$;
2) $\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}\right) : \left(\cos\frac{3\pi}{20} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{20}\right)$;
3) $\dfrac{\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{5\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{8}}$;
4) $(\sqrt{3} + \mathrm{i})\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$;
5) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}}{1 + \mathrm{i}}$;
6) $\dfrac{(1 + \mathrm{i})^5}{(1 - \mathrm{i})^4}$;
7) $(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^6$;
8) $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{10}$;
9) $(1 + \mathrm{i})^8(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^6$;
10) $\left(\dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} + \left(\dfrac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Вариант II. Выполните действия:

1) $10\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) : \left(5\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)$;
2) $\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right) \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{15} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{15}\right)$;
3) $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{10} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}}$;
4) $(1 + \mathrm{i})\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)$;
5) $\dfrac{\mathrm{i}}{\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}}$;
6) $\dfrac{(1 - \mathrm{i})^5}{(1 + \mathrm{i})^3}$;
7) $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^6$;
8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)^8$;
9) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^8(1 - \mathrm{i})^6$;
10) $\left(\dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{2n} + \left(\dfrac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Геометрический смысл умножения комплексных чисел

1. **Умножение** комплексных чисел имеет следующий геометрический смысл. Пусть

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1);$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2).$$

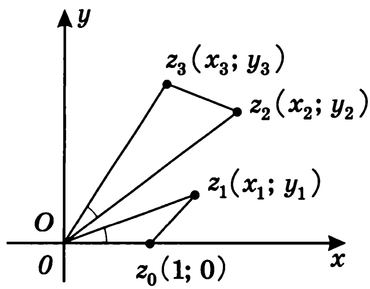
По теореме, доказанной ранее,

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Так как

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |z_3|$;
2) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \arg(z_3)$,

то геометрически это означает, что точка $z_3(x_3; y_3)$ получается поворотом точки $z_2(x_2; y_2)$ на угол $\varphi_1 = \arg(z_1)$ с центром в начале координат $O(0;0)$ и растяжением (сжатием) в $k_1 = |z_1|$ раз, или же поворотом точки $z_1(x_1; y_1)$ на угол $\varphi_2 = \arg(z_2)$ и растяжением (сжатием) в $k_2 = |z_2|$ раз. Поскольку $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, выбор между этими двумя вариантами — это вопрос удобства.



Для наглядности рассмотрим точку $z_0(1;0)$ и треугольники $\triangle Oz_0z_1$, $\triangle Oz_2z_3$

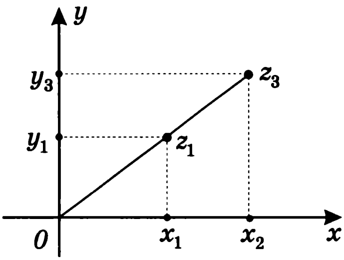
1. Так как $\dfrac{|z_3|}{|z_1|} = \dfrac{|z_2 \cdot z_1|}{|z_1|} = \dfrac{|z_2|}{1} = \dfrac{|z_2|}{|z_0|}$, то $\dfrac{|z_3|}{|z_1|} = \dfrac{|z_2|}{|z_0|}$.
2. Очевидно, что $\angle z_2Oz_3 = \angle z_1Oz_0 = \arg(z_1) = \varphi_1$; тогда

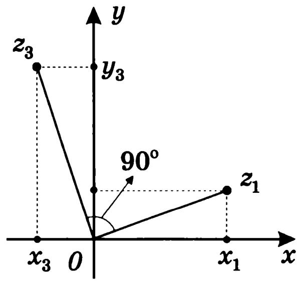
$$\triangle Oz_0z_1 \sim \triangle Oz_2z_3,$$

что показывает как геометрически построить точку z_3 по точкам z_1, z_2 и z_0.

Примечание. Если $k > 1$, то получаем растяжение в k раз, если $k < 1$, то получаем сжатие в $\frac{1}{k}$ раз $(k > 0)$.

Пример 1. Пусть $z_2 = 2$ и $z_1(x_1; y_1)$. Построить $z_3 = z_1 \cdot z_2$. Поскольку $|z_2| = 2$, $\arg(z_2) = 0$, умножение на число z_2 — это просто растяжение в два раза (рисунок слева).





Пример 2. Пусть $z_2 = 2\mathrm{i}$ и $z_1(x_1; y_1)$. Постройте $z_3 = z_1 \cdot z_2$ Так как $|z_2| = |2\mathrm{i}| = 2$, $|z_3| = 2|z_1|$, а $\arg(2\mathrm{i}) = 90^\circ$, то умножение на комплексное число $2\mathrm{i}$ геометрически означает поворот на 90° и растяжение в два раза (рисунок справа).

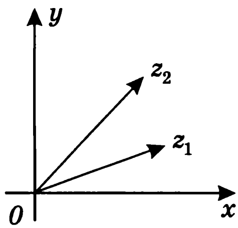
2. **Деление** комплексных чисел имеет следующий геометрический смысл. Если комплексным числам

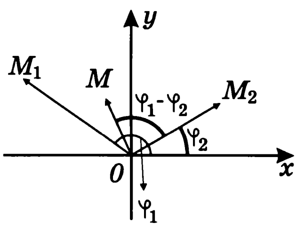
$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1);$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

соответствуют векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$, то частному

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$$

соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$, получающийся из вектора $\overrightarrow{OM_1}$ поворотом на угол φ_2 в отрицательном направлении и сжатием в $|z_2|$ раз, если $|z_2| \geqslant 1$, или же растяжением в $\frac{1}{|z_2|}$ раз, если $0 < |z_2| < 1$ (см. рисунок).





3. Скалярное произведение векторов в комплексной форме. Выразим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{Oz_1}$ и $\overrightarrow{Oz_2}$ через координаты комплексных чисел z_1 и z_2 (рисунок слева на стр. 65)

$$z_1 = x_1 + y_1\,\mathrm{i}; \quad z_2 = x_2 + y_2\,\mathrm{i}.$$

Известно, что если $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}.$$

1) Тогда $\overrightarrow{Oz_1} \cdot \overrightarrow{Oz_2} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} &= (x_1 + y_1\,\mathrm{i})(x_2 - y_2\,\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\,\mathrm{i})(x_1 - y_1\,\mathrm{i}) = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + (y_1x_2 - y_2x_1)\mathrm{i} + x_1x_2 + y_1y_2 - \\ &\quad - (y_1x_2 - y_2x_1)\mathrm{i} = 2(x_1x_2 + y_1y_2). \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что

$$\boxed{\overrightarrow{Oz_1} \cdot \overrightarrow{Oz_2} = \frac{1}{2}(z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1})},$$

где $\overline{z}$ — число, сопряженное числу z.

2) Далее рассмотрим произвольные точки z_1, z_2, z_3, z_4; учитывая предыдущий вывод, получим

$$\begin{aligned} \overrightarrow{z_1z_2} \cdot \overrightarrow{z_3z_4} &= (\overrightarrow{Oz_2} - \overrightarrow{Oz_1})(\overrightarrow{Oz_4} - \overrightarrow{Oz_3}) = \\ &= \overrightarrow{Oz_2} \cdot \overrightarrow{Oz_4} - \overrightarrow{Oz_1} \cdot \overrightarrow{Oz_4} - \overrightarrow{Oz_2} \cdot \overrightarrow{Oz_3} + \overrightarrow{Oz_1} \cdot \overrightarrow{Oz_3} = \\ &= \frac{1}{2}(z_2{\cdot}\overline{z_4} + \overline{z_2}{\cdot}z_4 - z_1{\cdot}\overline{z_4} - z_4{\cdot}\overline{z_1} - z_2{\cdot}\overline{z_3} - \\ &\quad - z_3{\cdot}\overline{z_2} + z_1{\cdot}\overline{z_3} + z_3{\cdot}\overline{z_1}) = \\ &= \frac{1}{2}\big(z_2(\overline{z_4} - \overline{z_3}) - z_1(\overline{z_4} - \overline{z_3}) + z_4(\overline{z_2} - \overline{z_1}) - z_3(\overline{z_2} - \overline{z_1})\big) = \\ &= \frac{1}{2}\big((z_2 - z_1)(\overline{z_4} - \overline{z_3}) + (z_4 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_1})\big). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\boxed{\overrightarrow{z_1z_2} \cdot \overrightarrow{z_3z_4} = \frac{1}{2}((z_2 - z_1)(\overline{z_4} - \overline{z_3}) + (z_4 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_1}))}.$$

При $\begin{cases} z_1 = z_3 \\ z_2 = z_4 \end{cases}$ имеем $\overrightarrow{z_1z_2}^2 = (z_2 - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = R^2$.

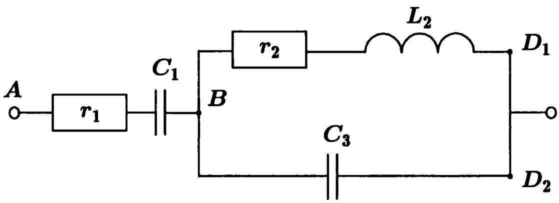
Пусть $z_2 = z$ — произвольное число. Тогда получим уравнение окружности

$$|\overline{z_1 z}|^2 = \boxed{(z - z_1)(\overline{z} - \overline{z_1}) = R^2},$$

где $z_1(x_1; y_1)$ — центр окружности, а $R = |\overline{z_1 z}| = |z - z_1|$. Если $z_1(0;0)$, то получается $z \cdot \overline{z} = R^2$ — уравнение окружности с центром в начале координат.

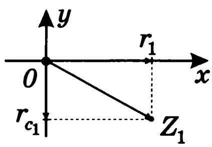
4. **Приложение комплексных чисел в электротехнике.**

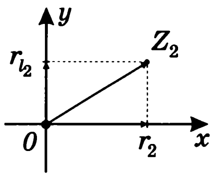
Комплексные числа широко используются в электротехнике (символический метод) для расчета цепей переменного тока, содержащих активные (резисторы) и реактивные (индуктивности и конденсаторы) элементы. В частности, для расчета сопротивления цепи. Проиллюстрируем это на примере.



Пусть $r_1 = 5$ Ом, $r_{c_1} = 15$ Ом, $r_2 = 12$ Ом, $r_{l_2} = 16$ Ом, $r_{c_3} = 10$ Ом. Необходимо найти сопротивление всей цепи.

Сопротивление на участке цепи AB обозначим Z_1. Это сопротивление можно представлять комплексным числом, так как оно состоит из двух независимых величин, а именно — активной r_1 и реактивной r_{c_1}, зависящей от частоты тока и емкости конденсатора: $r_{c_1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1}$. Аналогично $r_{c_3} = \frac{1}{\omega \cdot C_3}$. Здесь $\omega = 2\pi f$ — круговая частота.





Мы получаем $Z_1 = (r_1; r_{c_1}) = r_1 - r_{c_1}\,\mathrm{i}$, поскольку для емкостного сопротивления вектор реактивного сопротивления отстает на $\frac{\pi}{2}$ (рисунок слева).

На участке BD_1 имеем $r_{l_2} = \omega \cdot L_2$. Индуктивное сопротивление опережает активное сопротивление на $\frac{\pi}{2}$ (рисунок справа на стр. 67), поэтому

$$Z_2 = (r_2; r_{l_2}) = r_2 + r_{l_2}\mathrm{i} = r_2 + \omega L_2 \mathrm{i}.$$

На участке BD_2 присутствует только емкостное сопротивление $Z_3 = -r_{c_3}\mathrm{i}$

Таким образом, $Z_1 = 5 - 15\mathrm{i}$ Ом, $Z_2 = 12 + 16\mathrm{i}$ Ом, $Z_3 = -10\mathrm{i}$ Ом. Для параллельного соединения $Z_{2-3} = \dfrac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}$;

$$Z_{2-3} = \frac{(12+16\mathrm{i})(-10\mathrm{i})}{12+16\mathrm{i}-10\mathrm{i}} = \frac{160-12\mathrm{i}}{2+16\mathrm{i}} = \frac{80-6\mathrm{i}}{1+8\mathrm{i}} =$$
$$= \frac{(80-6\mathrm{i})(1+8\mathrm{i})}{1-8\mathrm{i}^2} = \frac{80-48-688\mathrm{i}}{9} = \frac{32-688\mathrm{i}}{9}\ \text{Ом}.$$

Для последовательного соединения

$$Z_{1-3} = Z_1 + Z_{2-3} = 5 - 15\mathrm{i} + \frac{32-688\mathrm{i}}{9} =$$
$$= \frac{45-135\mathrm{i}+32-688\mathrm{i}}{9} = \frac{77-823\mathrm{i}}{9}\ \text{Ом}.$$

Аналогичным образом комплексные числа применяются для выражения других характеристик электрических цепей.[3]

[3]В теорию переменных токов метод введен Штейнменцом, а затем в России академиком В. Ф. Миткевичем. См. Л. А. Частоедов. «Электротехника» М.: Высшая школа, 1989 г., И. Н. Добротворский «Теория электрических цепей» Радио и связь, 1989 г.

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа

Теорема. Пусть $z^n = z_0$. Тогда

$$z = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right), \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} z_0 &= |z_0|(\cos\varphi_0 + \mathrm{i}\sin\varphi_0); \\ z &= |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi); \\ z^n &= |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi). \end{aligned}$$

Из равенства $z^n = z_0$ следует, что $|z_0| = |z^n|$; $|z| = \sqrt[n]{|z_0|}$, и $\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi = \cos\varphi_0 + \mathrm{i}\sin\varphi_0$, т. е.

$$\left\{\begin{array}{l} \cos n\varphi = \cos\varphi_0 \\ \sin n\varphi = \sin\varphi_0 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k,$$

откуда $\varphi = \dfrac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}$ (как мы увидим позже, угол $\dfrac{\varphi_0}{n}$ можно рассматривать как угол поворота вершины правильного многоугольника относительно оси Ox).

Таким образом, формула вычисления корня n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из комплексного числа z_0 имеет вид

$$\boxed{z = \sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим п р и м е р ы использования теоремы.

Требуется найти все значения корня n-й степени из заданного комплексного числа.

1) $\sqrt{-1} = \sqrt{|-1|(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)} = 1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi + 2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi + 2\pi k}{2}\right)$.

Так как $|-1| = 1$ и $-1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$, то

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2\pi k}{2}.$$

При $k = 0$ $\quad \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = \mathrm{i}$;

при $k = 1$ $\quad \cos\dfrac{\pi + 2\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi + 2\pi}{2} = 0 + \mathrm{i}(-1) = -\mathrm{i}$.

Впрочем, это было известно и ранее. Мы просто убедились, что формула работает.

2) $\sqrt[4]{\cos 100^\circ + \mathrm{i}\sin 100^\circ} = \cos\dfrac{100^\circ + 360^\circ k}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{100^\circ + 360^\circ k}{4} =$
$= \cos(25^\circ + 90^\circ k) + \mathrm{i}\sin(25^\circ + 90^\circ k)$. Все значения корней получим, придавая k значения $0; 1; 2; 3$.

В дальнейшем для удобства мы будем использовать обозначение

$$\varepsilon_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Можно доказать, что все корни степени n из 1 выражаются через ε_n:

$$\sqrt[n]{1} = \left\{1; \varepsilon_n; \varepsilon_n^2; \varepsilon_n^3; \ldots; \varepsilon_n^{n-1}\right\}.$$

Как говорят математики, корни из 1 образуют *циклическую группу*; ε_n называется *примитивным* или *первообразным корнем* степени n, если $\varepsilon_n^n = 1$ и $\varepsilon_n^k \neq 1$ при $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Покажем, как можно использовать первообразные корни для решения уравнений, на примерах нахождения корней n-й степени из комплексного числа.

3) $z^3 = 1$. Имеем: $z_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{|1|(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)}$;

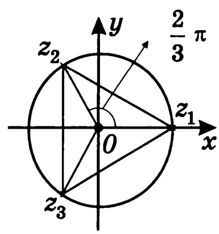
$$z_k = \cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{0 + 2\pi k}{3} = \cos\frac{2\pi k}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{3}.$$

При $k = 1, 2, 3$ получим

$$k = 1,\quad z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};$$

$$k = 2,\quad z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 2\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 2\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = z_1^2;$$

$$k = 3,\quad z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 3\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot 3\right) = 1 = z_1^3.$$



Поскольку $\varepsilon_3 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3} = z_1$ — первообразный корень, мы имеем $z_2 = \varepsilon_3^2$ и $z_3 = \varepsilon_3^3 = 1$, т. е. $\sqrt[3]{1} = \{1; \varepsilon_3; \varepsilon_3^2\}$.

Ответ: $\left\{1; -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Корни уравнения $z^n = z_0$ красиво интерпретируются как координаты вершин правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z_0|}$ с центром в начале координат.

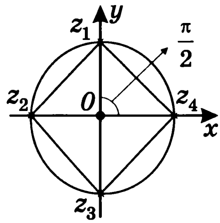
4) $z^4 = 1$. Так как $1 = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi$, то

$$z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1\cdot(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi)};$$
$$z_k = |1|\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right) = \cos\frac{2\pi k}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{4}$$

($\varepsilon_4^k = \cos\frac{2\pi k}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{4}$).

При $k = 1; 2; 3; 4$ мы получим

$$k=1,\quad z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i} = \varepsilon_4;$$
$$k=2,\quad z_2 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1 = \varepsilon_4^2;$$
$$k=3,\quad z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = -\mathrm{i} = \varepsilon_4^3;$$
$$k=4,\quad z_4 = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1 = \varepsilon_4^4.$$



Таким образом, $\sqrt[4]{1} = \{\varepsilon_4; \varepsilon_4^2; \varepsilon_4^3; \varepsilon_4^4\}$ или $\sqrt[4]{1} = \{1; \varepsilon_4; \varepsilon_4^2; \varepsilon_4^3\}$, где $\varepsilon_4 = \mathrm{i}$ — первообразный корень.

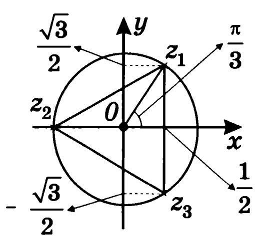
Ответ: $\{1; \mathrm{i}; -1; -\mathrm{i}\}$

5) $z^3 = -1$. Корни также можно найти по общей формуле. Имеем: $|z^3| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$; $-1 = 1(-1+0) = 1(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$. Значит,

$$\sqrt[3]{-1} = 1\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right).$$

При $k = 0; 1; 2$ получаем

$$k=0,\quad z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};$$
$$k=1,\quad z_2 = \cos\frac{\pi+2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\pi}{3} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1;$$
$$k=2,\quad z_3 = \cos\frac{\pi+4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi+4\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$



Отметим, что $\frac{\pi}{3}$ — угол поворота треугольника $z_1z_2z_3$, в общем случае этот угол равен $\frac{\varphi_0}{n}$, где φ_0 — аргумент комплексного числа, из которого извлекается корень.

Примечания.

1. Очевидно, что равенство $z^3=-1$ равносильно равенству $(-z)^3=1$, и тогда $z=-\sqrt[3]{1}$, т.е. для корня нечетной степени знак «минус» всегда можно вынести за знак корня. Например, так как $\sqrt[3]{1}=\{1;\varepsilon_3;\varepsilon_3^2\}$, где $\varepsilon_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$; $\varepsilon_3^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$, то

$$\sqrt[3]{-1}=\{-1;-\varepsilon_3;-\varepsilon_3^2\}=\left\{-1;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i};\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}.$$

2. Оказывается, для нахождения корня n-й степени из произвольного комплексного числа можно использовать первообразные корни n-й степени из единицы. Пусть z_1 — одно из значений (корней) $\sqrt[n]{z_0}$. Покажем, как найти все остальные корни $\sqrt[n]{z_0}$.
   Пусть $z_1^n=z_0$ и $z_2^n=z_0$, тогда $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n=\frac{z_2^n}{z_1^n}=\frac{z_0}{z_0}=1$.
   Значит, $z_2^n=1\cdot z_1^n$, т.е. $z_2=\sqrt[n]{z_0\cdot 1}=\sqrt[n]{z_0}\cdot\sqrt[n]{1}=z_1\cdot\sqrt[n]{1}$.
   Мы приходим к выводу, что

$$\sqrt[n]{z_0}=\{z_1;z_1\varepsilon_n;z_1\varepsilon_n^2;z_1\varepsilon_n^3;\ldots;z_1\varepsilon_n^{n-1}\}.$$

   Решение примера 5) иллюстрирует эту идею.

3. Задача представления значения ε_n в форме, содержащей только квадратные корни, как например выражение для ε_3, является алгебраическим аналогом известной геометрической задачи:
   вписать правильный n-угольник в единичную окружность при помощи только циркуля и линейки.
   Это построение будет возможно в том и только в том случае, когда мы умеем строить отрезки длины $\cos\frac{2\pi}{n}$ и $\sin\frac{2\pi}{n}$. Оказывается, это возможно тогда и только тогда, когда указанные числа могут быть представлены в форме, содержащей только квадратные корни.
   Евклид дает в своей книге «Начала» построение для $n=3,4,5,6,8,$ $10,12,15$.
   Очевидно, что построение возможно для любого значения n, которое равно одному из приведенных значений, умноженную на какую-либо степень числа 2. Однако существуют и другие частные значения n, для которых построение возможно. Гаусс доказал, что можно построить правильные n-угольники, когда n — простое число вида $n=2^{2^k}+1$. Таковы простые числа 3, 5, 17, 257 и 65537, получающиеся при $k=0,1,2,3,4$. Увы, до сих пор не известно, существуют ли другие простые числа, представимые в такой форме.

Практикум 6

Решите уравнения и изобразите все корни как вершины правильного n-угольника на комплексной плоскости.

1. $z^4 = -\mathrm{i}$;
2. $z^3 = 8\mathrm{i}$;
3. $z^3 = -\mathrm{i}$;
4. $z^4 = 16\mathrm{i}$;
5. $z^4 = -1$;
6. $z^6 = 64$;
7. $z^6 = -64\mathrm{i}$;
8. $z^8 = \mathrm{i}$;
9. $z^6 = -1$;
10. $z^5 = -32$.

Решение практикума 6

Решите уравнения и изобразите все корни как вершины правильного n-угольника на комплексной плоскости.

1. $z^4 = -\mathrm{i}$.

Имеем: $-\mathrm{i} = \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}$ $\quad (|-\mathrm{i}| = 1)$;

$$z_k = \sqrt[4]{\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4};$$

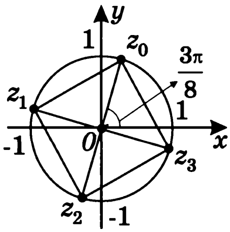
$\frac{\varphi_0}{n} = \frac{3\pi}{8}$ (нумерация корней может начинаться и с $k = 0$). Значит,

$$k = 0, \quad z_0 = \cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8};$$

$$k = 1, \quad z_1 = \cos\frac{7\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{8};$$

$$k = 2; \quad z_2 = \cos\frac{11\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{8};$$

$$k = 3; \quad z_3 = \cos\frac{15\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{15\pi}{8}.$$



Учитывая, что

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{6\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2};$$

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{6\pi}{8}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$$

получаем

$$z_0 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\mathrm{i}; \qquad z_1 = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\mathrm{i};$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\mathrm{i}; \quad z_3 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\mathrm{i}.$$

П р и м е ч а н и е. Иногда корни удобно оставить в тригонометрической, а иногда в алгебраической форме.

2. $z^3 = 8\mathrm{i}$.

Имеем:

$$8\mathrm{i} = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$z_k = 2\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right).$$

Следовательно $\frac{\varphi_0}{n}=\frac{\pi}{6}$ и $R=2$ — радиус окружности. Корни уравнения получаем при $k=0;1;2$:

$$k=0,\quad z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

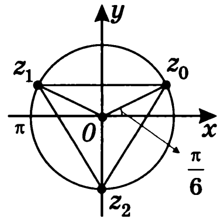
$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{3}+\mathrm{i};$$

$$k=1,\quad z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\sqrt{3}+\mathrm{i};$$

$$k=2,\quad z_2=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=$$

$$=2(0-\mathrm{i})=-2\mathrm{i}.$$



3. $z^3=-\mathrm{i}$.
Имеем: $-\mathrm{i}=\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}$;

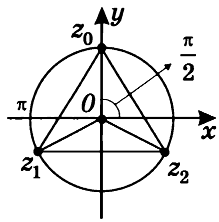
$$z_k=\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}.$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n}=\frac{\pi}{2}$ и $R=1$. Корни уравнения:

$$k=0,\quad z_0=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i};$$

$$k=1,\quad z_1=\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i};$$

$$k=2,\quad z_2=\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$



4. $z^4=16\mathrm{i}$.
Имеем: $\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$;

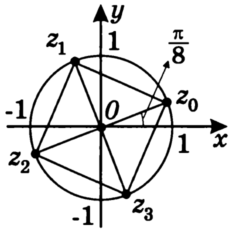
$$z_k=\sqrt[4]{16(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})}=2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}\right).$$

Таким образом, $\frac{\varphi_0}{n}=\frac{\pi}{8}$ и $R=2$. Корни уравнения:

$$k=0,\quad z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i}\right)=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\mathrm{i};$$

$$k=1,\quad z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{8}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i}\right)=$$
$$=-\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\mathrm{i};$$
$$k=2,\quad z_2=2\left(\cos\frac{9\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{8}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i}\right)=$$
$$=-\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\mathrm{i};$$
$$k=3,\quad z_3=2\left(\cos\frac{13\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{8}\right)=$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\mathrm{i}\right)=$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}\mathrm{i}.$$

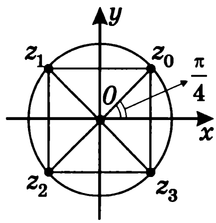


5. $z^4=-1$.
Имеем:

$$-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi;$$
$$z_k=\sqrt[4]{\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}.$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n}=\frac{\pi}{4}$ и $R=1$. Корни уравнения:

$$k=0,\quad z_0=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i};$$
$$k=1,\quad z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i};$$
$$k=2,\quad z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i};$$
$$k=3,\quad z_3=\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$



6. $z^6=64$.
Имеем:

$$64=64(1+0)=64(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi);$$
$$z_k=\sqrt[6]{64\left(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi\right)}=2\left(\cos\frac{2\pi+2\pi k}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi+2\pi k}{6}\right).$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n}=\frac{\pi}{3}$ и $R=2$. Корни уравнения:

$$k=0,\quad z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i};$$

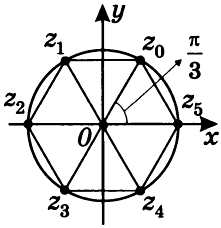
$$k=1,\quad z_1=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-1+\sqrt{3}\mathrm{i};$$

$$k=2,\quad z_2=2\left(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi\right)=-2;$$

$$k=3,\quad z_3=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)=$$
$$=-1-\sqrt{3}\mathrm{i};$$

$$k=4,\quad z_4=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i};$$

$$k=5,\quad z_5=2\left(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi\right)=2.$$



7. $z^6=-64\mathrm{i}$.

Имеем:

$$-64\mathrm{i}=64\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right);$$

$$z_k=\sqrt[6]{64\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)}=2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6}\right).$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n}=\frac{\pi}{4}$ и $R=2$. Корни уравнения:

$$k=0,\quad z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i};$$

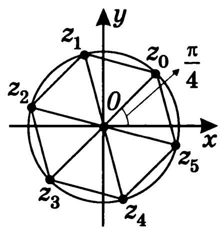
$$k=1,\quad z_1=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)=-\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\mathrm{i};$$

$$k=2,\quad z_2=2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right)=-\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\mathrm{i};$$

$$k=3,\quad z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)=$$
$$=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i};$$

$$k=4,\quad z_4=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right)=$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\mathrm{i};$$

$$k=5,\quad z_5=2\left(\cos\frac{23\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{23\pi}{12}\right)=$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\mathrm{i}.$$



(Здесь мы воспользовались преобразованиями типа

$$\cos\frac{7\pi}{12}=-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{7\pi}{6}}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.)$$

8. $z^8 = \mathrm{i}$.

Имеем: $\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$;

$$z_k = \sqrt[8]{\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{8}.$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{16}$ и $R = 1$. Корни уравнения:

$k = 0$, $z_0 = \cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}$;

$k = 1$, $z_1 = \cos\frac{5\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{16}$;

$k = 2$, $z_2 = \cos\frac{9\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}$;

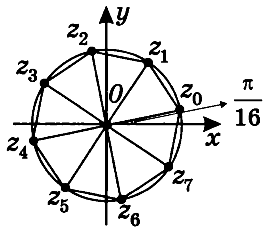
$k = 3$, $z_3 = \cos\frac{13\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{16}$;

$k = 4$, $z_4 = \cos\frac{17\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}$;

$k = 5$, $z_5 = \cos\frac{21\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{21\pi}{16}$;

$k = 6$, $z_6 = \cos\frac{25\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}$;

$k = 7$, $z_7 = \cos\frac{29\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{29\pi}{16}$.



9. $z^6 = -1$.

Имеем: $-1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$;

$$z_k = \sqrt[6]{\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}.$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{6}$ и $R = 1$. Корни уравнения:

$k = 0$, $z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$;

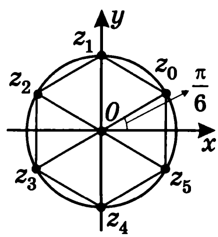
$k = 1$, $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$;

$k = 2$, $z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$;

$k = 3$, $z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$;

$k = 4$, $z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = -\mathrm{i}$;

$k = 5$, $z_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.



10. $z^5 = -32$.

Имеем:

$$-32 = 32(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi);$$

$$z_k = \sqrt[5]{32(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)} =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right).$$

Значит, $\frac{\varphi_0}{n} = \frac{\pi}{5}$ и $R = 2$. Корни уравнения:

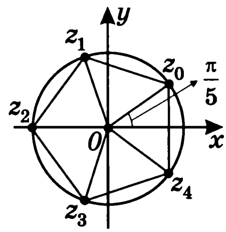
$$k = 0, \quad z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right);$$

$$k = 1, \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{5}\right);$$

$$k = 2, \quad z_2 = 2\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2;$$

$$k = 3, \quad z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{5}\right);$$

$$k = 4, \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{5}\right).$$



Решение алгебраических уравнений

Рассмотрим ряд известных теорем.

Теорема 1. Любой многочлен n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$)

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, имеет n корней, если каждый из его корней считать столько раз какова его кратность (основная теорема алгебры).

Теорема 2. Если многочлен n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$)

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, имеет комплексный корень $z = a + b\mathrm{i}$ ($b \neq 0$), то оно обязательно имеет своим корнем $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$ (сопряженный корень).

Следствие 1. Если n — нечетное число, то уравнение $P_n(x) = 0$ имеет хотя бы один действительный корень (нечетное количество действительных корней).

Следствие 2. Если n — четное число, то уравнение $P_n(x) = 0$ либо не имеет действительных корней, либо имеет только четное количество действительных корней (с учетом кратности).

Решение квадратных уравнений и уравнений, приводящихся к ним

Рассмотрим несколько примеров.

1) $x^2 + 4x + 5 = 0$. Решая по обычной формуле, получим $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1}$. Так как $-1 = 1(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$, то $\sqrt{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2\pi k}{2}$;

$$k = 0, \quad \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i} = \mathrm{i};$$

$$k = 1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - \mathrm{i} = -\mathrm{i} \quad (\sqrt{-1} = \pm\,\mathrm{i}).$$

Значит, $x_{1,2} = -2 \pm \mathrm{i}$.

2) $x^4 + x^2 + 1 = 0$. Это обычное биквадратное уравнение. Пусть $x^2 = t$, тогда $t^2 + t + 1 = 0$, и, учитывая результат предыдущего примера, получим

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

Но $t = x^2$, поэтому рассмотрим отдельно оба случая.

а) $x = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}$.

Так как $\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = 1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, то

$$x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}} = \sqrt{1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)} =$$

$$= \cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{2}.$$

Для $k=0,1$ получим

$$k=0,\quad \cos\frac{2\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{1\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{1\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};$$

$$k=1,\quad \cos\frac{8\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{6} = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

б) $x = \sqrt{\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}}$.

Так как $\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = 1\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, то

$$x = \sqrt{\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}} = \sqrt{1\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)} =$$

$$= \cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2}.$$

Для $k=0,1$ получим

$$k=0,\quad \cos\frac{4\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};$$

$$k=1,\quad \cos\frac{10\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{10\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

3) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$.

Пусть $x^3 = t$, тогда $t^2 - 28t + 27 = 0$.

Мы имеем $\left[\begin{array}{l} t=27 \\ t=1 \end{array}\right.$, а значит, $\left[\begin{array}{l} x^3=27 \\ x^3=1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{27} \\ x=\sqrt[3]{1} \end{array}\right.$.

Далее, $\sqrt[3]{1} = \left\{1; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$ (см. стр. 70), и поэтому $\sqrt[3]{27} = 3\cdot\sqrt[3]{1} = \left\{3; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

Ответ: $\left\{1; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; 3; -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

Решение уравнений 3-й степени (формулы Кардано)

Рассмотрим уравнение

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0.$$

Пусть $x=y-\frac{a_1}{3}$. Тогда

$$\left(y-\frac{a_1}{3}\right)^3+a_1\left(y-\frac{a_1}{3}\right)^2+a_2\left(y-\frac{a_1}{3}\right)+a_3=0;$$

$$y^3-y^2a_1+\frac{ya_1^2}{3}-\frac{a_1^3}{27}+a_1y^2-\frac{2ya_1^2}{3}+\frac{a_1^3}{9}+a_2y-\frac{a_2a_1}{3}+a_3=0;$$

$$y^3+\left(a_2-\frac{a_1^2}{3}\right)y+\frac{2a_1^3}{27}-\frac{a_2a_1}{3}+a_3=0.$$

Обозначим $a_2-\frac{a_1^2}{3}=p$ и $\frac{2a_1^3}{27}-\frac{a_2a_1}{3}+a_3=q$. Тогда уравнение примет вид $y^3+py+q=0$.

Пусть $y=z-\frac{p}{3z}$. Тогда

$$\left(z-\frac{p}{3z}\right)^3+p\left(z-\frac{p}{3z}\right)+q=0;$$

$$z^3-pz+\frac{p^2}{3z}-\frac{p^3}{27z^3}+pz-\frac{p^2}{3z}+q=0;$$

$$z^3-\frac{p^3}{27z^3}+q=0.$$

Пусть, наконец, $z^3=t$. Тогда уравнение принимает вид

$$t^2+tq-\frac{p^3}{27}=0,$$

значит, $t_{1,2}=\frac{-q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$.

Положим $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=R$; $t_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm R$.

Так как $z^3=t$, то $z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm R}$; будем считать, $z_k=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+R}$, $k=1,2,3$, и $z_i=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-R}$ для $i=4,5,6$. Поскольку $z_k^3=-\frac{q}{2}+R$ и $R=z_k^3+\frac{q}{2}$, то для $i=4,5,6$ и для $k=1,2,3$ соответственно мы имеем

$$z_i=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-R}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\left(\frac{q}{2}+z_k^3\right)}=\sqrt[3]{-q-z_k^3}.$$

Далее, имеем $z_k^3 - \dfrac{p^3}{27z_k^3} + q = 0$; $-q - z_k^3 = -\dfrac{p^3}{27z_k^3}$; $\sqrt[3]{\dfrac{(-p)^3}{27z_k^3}} = \dfrac{-p}{3z_k} =$
$= \sqrt[3]{-q - z_k^3} = z_i$, откуда

$$\boxed{z_i z_k = -\frac{p}{3}}, \quad i = 4,5,6;\ k = 1,2,3.$$

$$y_i = z_i - \frac{p}{3z_i} = -\frac{p}{3z_k} + z_k = y_k, \quad i = 4,5,6;\ k = 1,2,3.$$

Таким образом, если $y^3 + py + q = 0$, то

$$y = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}},$$

где $\sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ понимается однозначно, а для $\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$ в первом и втором слагаемом используются одинаковые значения.

Так как $-\dfrac{p}{3z_k} = z_i$, то

$$y = z_k + z_i = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

т. е. *к каждому значению* z_k *первого корня прибавляется такое значение* z_i, *что* $z_k z_i = -\frac{p}{3}$.

П р и м е р 1. $x^3 + 12x + 63 = 0$. Здесь $p = 12$, $q = 63$;

$$x = \sqrt[3]{-\frac{63}{2} + \sqrt{\frac{3969}{4} + 64}} + \sqrt[3]{-\frac{63}{2} - \sqrt{\frac{3969}{4} + 64}} =$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{63}{2} + \frac{65}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{63}{2} - \frac{65}{2}} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{-64}.$$

Мы знаем, что $\sqrt[3]{1} = \{1; \varepsilon; \varepsilon^2\}$, поскольку

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1(1 + 0 \cdot \mathrm{i})} = \sqrt[3]{\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{3};$$

$$z_1 = 1 \quad (z_1 = \varepsilon^3);$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \varepsilon \quad \text{(первообразный корень)};$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \varepsilon^2.$$

Для вычисления $\sqrt[3]{-64}$ воспользуемся тем, что $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4\sqrt[3]{1}$.

Обозначим значения корня как

$$z_4 = -4;$$

$$z_5 = -4(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}) = -4\varepsilon;$$

$$z_6 = -4(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = -4\varepsilon^2;$$

Тогда

а) $x_1 = z_1 + z_4 = 1 - 4 = -3$, так как $1(-4) = -\frac{p}{3}$, где $p = 12$.

б) $x_2 = z_2 + z_6 = \varepsilon + (-4\varepsilon^2)$, так как $\varepsilon(-4\varepsilon^2) = -\frac{p}{3} = -4$;

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i} = \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

в) $x_3 = z_3 + z_5 = \varepsilon^2 - 4\varepsilon$, так как $\varepsilon^2(-4\varepsilon) = -\frac{p}{3} = -4$;

$$x_3 = \frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Ответ: $\left\{-3; \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; \frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

Пример 2. $x^3 + 3x - 4 = 0$. Здесь $p = 3$, $q = -4$. Используя формулы Кардано, получим

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

Увидеть в этой сумме кубических корней корень $x = 1$ уравнения не так просто. В данном случае помогают идеи делимости теоремы Безу. Очевидно, что свободный член (-4) уравнения делится на $\pm 1; \pm 2; \pm 4$. При проверке убеждаемся, что $x = 1$ — корень. Далее

$$\begin{array}{r|l}
x^3+0x^2+3x-4 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-\ x^2\qquad\qquad} & x^2+x+4 \\
x^2+3x-4 & \\
\underline{x^2-\ x\quad\ \ } & \\
4x-4 & \\
\underline{4x-4} &
\end{array}$$

Итак, $x_1 = 1$; уравнение $x^2 + x + 4 = 0$ имеет корни

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}; \quad x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}.$$

Ответ: $\left\{1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

Решение уравнений 4-й степени

Пусть дано уравнение

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Применяя подстановку $x = y - \frac{a_1}{4}$, получим уравнение, которое не содержит одночлена третьей степени:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

$$p = -\frac{3}{8}a_1^2 + a_2\,;\; q = \frac{1}{8}a_1^3 - \frac{a_1a_2}{2} + a_3\,;\; r = -\frac{3}{256}a_1^4 + \frac{1}{16}a_1^2a_2 - \frac{a_1a_3}{4} + a_4\,.$$

Это уравнение относительно y, но для удобства вновь заменим y на x: $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Известно, что $a^2 + bx + c$ является полным квадратом при $D = 0$. В новом уравнении введем параметр λ следующим образом:

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + \lambda)^2 - ((2\lambda - p)x^2 - qx + (\lambda^2 - r)).$$

Значение λ выберем так, чтобы выражение $(2\lambda - p)x^2 - qx + (\lambda^2 - r)$ было точным квадратом, т. е. чтобы выполнялось условие

$$D = q^2 - 4(2\lambda - p)(\lambda^2 - r) = 0;$$

тогда правая часть предыдущего равенства будет представлена как разность квадратов. Для этого необходимо найти корни уравнения третьей степени относительно λ. Пусть эти корни будут λ_i, $i = 1;2;3$. Тогда $(\lambda_i^2 - r) - qx + (2\lambda_i - p)x^2 = (ax + b)^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, и уравнение приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + qx + r &= (x^2 + \lambda_i)^2 - (ax + b)^2 = \\ &= (x^2 + ax + b + \lambda_i)(x^2 - ax - b + \lambda_i) = 0. \end{aligned}$$

Итак, чтобы решить уравнение 4-й степени необходимо решить уравнение третьей степени и два квадратных уравнения.

Пример. $x^4 + 8x^2 + 14x^2 - 16x - 35 = 0$. В этом случае $a_1 = 8$, $a_2 = 14$, $a_3 = -16$, $a_4 = -35$.

Пусть $x = y - 2$ $\left(x = y - \frac{a_1}{4}\right)$. Тогда уравнение примет вид

$$(y-2)^4 + 8(y-2)^3 + 14(y-2)^2 - 16(y-2) - 35 = 0;$$

$$\begin{aligned} &y^4 - \underline{8y^3} + \underline{\underline{24y^2}} - \underline{\underline{\underline{32y}}} + 16 + \underline{8y^3} - \underline{\underline{48y^2}} + \underline{\underline{\underline{96y}}} - 64 + \\ &\quad + \underline{\underline{14y^2}} - \underline{\underline{\underline{56y}}} + 56 - \underline{\underline{\underline{16y}}} + 32 - 35 = 0; \end{aligned}$$

$$y^4 - 10y^2 - 8y + 5 = 0 \quad (p = -10,\; q = -8,\; r = 5).$$

Введем параметр λ:

$$(y^2+\lambda)^2-((2\lambda+10)y^2+8y+\lambda^2-5)=0.$$

Выражение $(2\lambda+10)y^2+8y+\lambda^2-5$ есть полный квадрат, только если дискриминант D равен нулю: $D=4^2-(2\lambda+10)(\lambda^2-5)=0$. Тогда $16=2\lambda^3+10\lambda^2-10\lambda-50$, т.е. $\lambda^3+5\lambda^2-5\lambda-33=0$. Свободный член этого уравнения имеет делители $\pm 1; \pm 3; \pm 11; \pm 33$. Проверяя, убеждаемся, что $\lambda_1=-3$ — корень. Тогда уравнение приобретает вид

$$(2(-3)+10)y^2+8y+9-5=(y^2-3)^2;$$
$$4(y+1)^2=(y^2-3)^2.$$

Значит,

$$\left[\begin{array}{l} y^2-3+2(y+1)=0 \\ y^2-3-2(y+1)=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} y^2+2y-1=0 \\ y^2-2y-5=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} y=-1+\sqrt{2} \\ y=-1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{6} \\ y=1-\sqrt{6} \end{array}\right..$$

Так как $x=y-2$, то $\left[\begin{array}{l} x=-3+\sqrt{2} \\ x=-3-\sqrt{2} \\ x=-1+\sqrt{6} \\ x=-1-\sqrt{6} \end{array}\right..$

Проверять остальные значения λ_2 и λ_3 нет смысла. Все корни найдены, и все они действительные.

В работах выдающихся математиков Н. Х. Абеля (1802–1829) из Норвегии и Э. Галуа (1811–1832) из Франции было доказано, что общих методов решения алгебраических уравнений выше 4-й степени не существует. При этом Э. Галуа создал стройную теорию и ввел, по существу, новые фундаментальные понятия, как группа, подгруппа, нормальный делитель, поле, расширение. Идеи и методы теории групп опередили свое время на многие десятилетия и были реализованы в современной квантовой механике, кристаллографии и теории относительности Эйнштейна.

Тренировочная работа 4

Вариант I.

1. Выполните действия с комплексными числами, представив их в тригонометрической форме:

1) $5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) : \left(\frac{5}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right)$;

2) $6\left(\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Вычислите $\sqrt[4]{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

3. Решите уравнения

1) $z^2 + 4z + 5 = 0$;
2) $x^3 - 2x + 4 = 0$;
3) $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$;
4) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;
5) $6x^4 - 19x^3 + 25x^2 - 19x + 6 = 0$;
6) $f(x) = 0$, где $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 10x - 8$.
Известно, что $f(1+\mathrm{i}) = 0$. Найдите остальные корни.
7) $z^2 = 3 + 4\mathrm{i}$ (двумя способами);
8) $z^2 - (5-\mathrm{i})z + 6 = 0$ (двумя способами).

Вариант II.

1. Выполните действия с комплексными числами, представив их в тригонометрической форме.

1) $4(\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big) \cdot \frac{3}{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\Big)$;

2) $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) : \left(\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2. Вычислите $\sqrt[4]{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

3. Решите уравнения

1) $z^2 - 3z + 3 = 0$;
2) $x^3 - x + 6 = 0$;
3) $2x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$;
4) $x^6 + 10x^3 + 9 = 0$;
5) $10x^4 + 39x^3 + 49x^2 + 39x + 10 = 0$;
6) $f(x) = 0$, где $f(x) = x^5 - 8x^4 + 22x^3 - 26x^2 + 21x - 18$.
Известно, что $f(\mathrm{i}) = 0$. Найдите остальные корни.
7) $z^2 = 16 + 8\mathrm{i}$ (двумя способами);
8) $2z^2 - (3-\mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i} = 0$ (двумя способами).

Показательная форма комплексного числа

Известно, что тригонометрические функции можно определить как некоторые бесконечные ряды вида

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \ldots .$$

С другой стороны, e^x можно также представить в виде ряда:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= 1 + \mathrm{i}x - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \\ &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots) + \mathrm{i}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) = \\ &= \cos x + \mathrm{i}\sin x.\end{aligned}$$

Мы пришли к формуле Эйлера

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x},$$

которая соединяет показательную форму комплексного числа с тригонометрической формой.

При $x = \pi$ получаем $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$, т.е.

$$\boxed{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1},$$

а при $x = 2\pi$ имеем

$$\boxed{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1}.$$

Это легендарная формула, соединяющая три знаменитых числа, которые определили целую эпоху в математике.

Для комплексных показателей остаются в силе основные правила действий с показателями:

а) при умножении чисел показатели степеней складываются;
б) при делении чисел показатели степеней вычитаются;
в) при возведении чисел в степень показатели степеней перемножаются.

Отметим, что показательная функция имеет период $2\pi\mathrm{i}$. Действительно, так как $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1$ (см. формулу Эйлера), то $\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{z}\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{z}$.

Тригонометрическую форму комплексного числа

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

можно заменить показательной формой

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = |z|\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{i}}.$$

(Напомним, что $\mathrm{e}^{y\mathrm{i}} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$ при $x = 0$, где $y = \varphi$.)

Умножение, деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня целой положительной степени для комплексных чисел, заданных в показательной форме, выполняются по следующим формулам:

1) $z_1\cdot z_2 = |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\cdot|z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = |z_1||z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{|z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$;

3) $z^n = (|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n = |z|^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}\mathrm{i}}$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Формула Эйлера устанавливает связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией. Складывая и вычитая равенства

$$\mathrm{e}^{x\mathrm{i}} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$
$$\mathrm{e}^{-x\mathrm{i}} = \cos x - \mathrm{i}\sin x,$$

получаем

$$\boxed{\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}}, \quad \boxed{\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}}.$$

Эти две формулы Эйлера позволяют алгебраическим путем получить основные формулы тригонометрии.

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Действительно,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{-4} + \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4} =$$
$$= \frac{-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

2) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.
   Действительно,

$$2\sin x\cos x = 2\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} = \sin 2x.$$

3) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}\cos^2 x - \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} - \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \\ &= \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix} + e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{4} = \\ &= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} = \cos 2x.\end{aligned}$$

Примечание. Графиком функции $y = e^{xi}$ является единичная окружность с центром в точке $O(0;0)$ на комплексной плоскости. В связи с этим возможны различные представления комплексного числа в показательной форме. Значит и требование $\varphi \in [0; 2\pi)$ не обязательно.

Практикум 7

1. Найдите алгебраический вид комплексного числа:

1) $e^{i\frac{\pi}{4}}$;

2) $e^{\pi e^{-i\frac{\pi}{2}}}$;

3) $e^{2+i\pi}$;

4) $\cos i$;

5) $\sin i$;

6) $\cos(1-i)$.

2. Представьте комплексное число в показательной форме:

1) $z = 2i$;

2) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

3) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; вычислите:

а) $z_1 \cdot z_2$;

б) $\dfrac{z_1}{z_2}$;

в) z_1^6;

г) $\sqrt[4]{z_1}$.

Решение практикума 7

1. Найдите алгебраический вид комплексного числа:

1) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

2) $e^{\pi e^{-i\frac{\pi}{2}}} = (e^{\pi})^{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = (e^{\pi})^{\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})} = e^{\pi\cdot(-i)} =$
$= \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$.

3) $e^{2+i\pi} = e^2 e^{i\pi} = e^2(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^2$.

4) $\cos i = \dfrac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \dfrac{e^{-1} + e}{2} = \dfrac{1 + e^2}{2e}$.

5) $\sin i = \dfrac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = \dfrac{e^{-1} - e}{2i} = \dfrac{1 - e^2}{2e} \cdot \dfrac{1}{i} = \dfrac{e^2 - 1}{2e} i$.

6) $$\cos(1 - i) = \frac{e^{i(1-i)} + e^{-i(1-i)}}{2} =$$
$$= \frac{e^{1+i} + e^{-1-i}}{2} = \frac{e \cdot e^{i} + e^{-1}e^{-i}}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(e(\cos 1 + i\sin 1) + e^{-1}(\cos(-1) + i\sin(-1))) =$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{e\cos 1} + ei\sin 1 + \underline{e^{-1}\cos 1} - ie^{-1}\sin 1) =$$
$$= \frac{1}{2}((e + e^{-1})\cos 1 + i(e - e^{-1})\sin 1) =$$
$$= \frac{e^2 + 1}{2e}\cos 1 + i\frac{e^2 - 1}{2e}\sin 1.$$

2. Представьте комплексное число в показательной форме:

1) $z = 2i$.
Очевидно, что
$$|z| = 2; \quad \begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = 1 \end{cases},$$
откуда $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Значит, $z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, т.е. $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
Имеем:
$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2; \quad \begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$
откуда $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

3) $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$. Вычислите:

а) $z_1 \cdot z_2$;
б) $\frac{z_1}{z_2}$;
в) z_1^6;
г) $\sqrt[4]{z_1}$.

Представим z_1 и z_2 в показательной форме. Имеем:

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \\ = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Так как $\cos x - \mathrm{i}\sin x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ (см. стр. 88), то

$$z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \\ = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

Тогда

а) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$;

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$;

в) $z_1^6 = (\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^6 = (\sqrt{2})^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\cdot 6} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3\pi}{2}}$;

г) $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4}\mathrm{i}}$;

$$k = 0, \quad z_0 = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}};$$
$$k = 1, \quad z_1 = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4}} = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{16}};$$
$$k = 2, \quad z_2 = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4}} = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{16}} = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{15\pi}{16}};$$
$$k = 3, \quad z_3 = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4}} = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{25\pi}{16}} = \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{16}}.$$

Примечание. Поскольку

$$\cos x + \mathrm{i}\sin x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x};$$
$$\cos x - \mathrm{i}\sin x = \cos(2\pi k - x) + \mathrm{i}\sin(2\pi k - x) = \mathrm{e}^{(2\pi k - x)\mathrm{i}},$$

а с другой стороны,

$$\cos x - \mathrm{i}\sin x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x},$$

то существуют различные формы представления комплексного числа в показательной форме. Это можно увидеть на единичной окружности.

Тренировочная работа 5

Вариант I.

1. Найдите все корни n-й степени из комплексного числа и проиллюстрируйте их на координатной плоскости вершинами правильного многоугольника.

1) $\sqrt[4]{-4}$;
2) $\sqrt[6]{\mathrm{i}}$;
3) $\sqrt[3]{-4+4\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

2. Представьте данные комплексные числа в показательной форме и вычислите.

1) $z_1 = 2+2\mathrm{i}$; $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

а) $z_1 \cdot z_2$;
б) $z_1 : z_2$;
в) z_1^6;
г) $\sqrt[4]{z_2}$.

2) $z_1 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i}$; $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

а) $z_1 \cdot z_2$;
б) $z_1 : z_2$;
в) z_2^4;
г) $\sqrt[3]{z_1}$;
д) $\sqrt[4]{z_2}$;
е) $\sqrt[4]{\overline{z_1}} \cdot \sqrt[3]{\overline{z_2}}$.

Вариант II.

1. Найдите все корни n-й степени из комплексного числа и проиллюстрируйте их на координатной плоскости вершинами правильного многоугольника.

1) $\sqrt[6]{-64}$;
2) $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}$;
3) $\sqrt[4]{8-8\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

2. Представьте данные комплексные числа в показательной форме и вычислите.

1) $z_1 = 2-2\mathrm{i}$; $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

а) $z_1 z_2$;
б) $z_1 : z_2$;
в) z_1^6;
г) $\sqrt[4]{z_2}$.

2) $z_1 = 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$; $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$.

а) $z_1 : z_2$;
б) $z_1 \cdot z_2$;
в) z_1^4;
г) $\sqrt[3]{z_2}$;
д) $\sqrt[4]{z_1}$;
е) $\sqrt[4]{\overline{z_1}} \cdot \sqrt[3]{\overline{z_2}}$.

Тренировочная работа 6

Вариант I.

1. Решите уравнение: $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$.
2. $f(x) = 0$, где $f(x) = 4x^4 - 24x^3 + 57x^2 + 18x - 45$.
   Известно, что $f(3 + \mathrm{i}\sqrt{6}) = 0$. Найдите остальные корни.
3. Вычислите z^6, если $z + 2\overline{z} = 3 - \mathrm{i}$.
4. Найдите уравнение кривой, для которой $|z + 1 + \mathrm{i}| = |z - 1 + 2\mathrm{i}|$.
5. Заштрихуйте на плоскости множество всех точек кривой, удовлетворяющих неравенству $|z + 1 + 2\mathrm{i}| \leqslant 1$.
6. Найдите z, если $\begin{cases} |z| = 0{,}5|b| \\ |\arg z - \arg b| = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$, где $b = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$;
7. Найдите область изменения $|z - 6 + 2\mathrm{i}|$, где $\begin{cases} |z - 6| = \sqrt{5} \\ |z + 2\mathrm{i}| = 5 \end{cases}$.
8. При каких $a \in \mathbb{R}$ корнем уравнения $x^3 - (a + 3)x^2 + 6a^2x + a^2 - 5 = 0$ является число $x_1 = \dfrac{8}{\left(\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{20} + \mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{20}\right)\right)^5}$? Найдите остальные корни.

Вариант II.

1. Решите уравнение $z^2 - 2(z + \overline{z}) + 4 = 0$.
2. Решите уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = 4x^4 - 24x^3 + 63x^2 - 18x + 45$.
   Известно, что $f(3 - \mathrm{i}\sqrt{6}) = 0$. Найдите остальные корни.
3. Вычислите z^5, если $3z - \overline{z} = 4 + 8\mathrm{i}$.
4. Найдите уравнение кривой, для которой $|z + 2 - 2\mathrm{i}| = |z - 1 - 3\mathrm{i}|$.
5. Заштрихуйте на плоскости множество всех точек кривой, удовлетворяющих неравенству $|z - 2 + 2\mathrm{i}| \geqslant 3$;
6. Найдите z, если $\begin{cases} |z| = 2|d| \\ |\arg d - \arg z| = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$, где $d = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
7. Найдите область изменения $\mathrm{Im}(z)$, где $\begin{cases} |z + 10| = \sqrt{65} \\ |z - 2\mathrm{i}| = \sqrt{13} \end{cases}$.
8. При каких $b \in \mathbb{R}$ корнем уравнения $x^3 - (b + 6)x^2 + 8b^2x + 95 + b^2 = 0$ является число $x_1 = \dfrac{32}{0{,}25\left(\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right)\right)^{27}}$? Найдите остальные корни.

Решение более сложных примеров

Практикум 8

1. Найдите наибольший модуль комплексного числа z, удовлетворяющего неравенству $|z\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 4| \leqslant |\mathrm{i}|$.
2. Найдите наименьший модуль комплексного числа z, для которого выполняется условие $|z - \mathrm{i}| = |z + \sqrt{3}|$.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \left|\dfrac{z+2\mathrm{i}}{z+4\mathrm{i}}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z+2\mathrm{i}}{z-1}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$
4. Изобразите комплексные числа z, для которых $z^3 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.
5. Изобразите комплексные числа z, удовлетворяющие условию
$$z^2 = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}.$$
6. Даны два комплексных числа $z_1 = 3 + 4\mathrm{i}$ и $z_2 = -4 + 3\mathrm{i}$. При каких действительных значениях a и b выполняется условие
$$\frac{z_1}{z_2} = az_1 + bz_2?$$
7. Изобразите множество $\dfrac{|z+1|}{|z-2|} \geqslant 0{,}5$ точек комплексной плоскости.
8. Найдите z^{12}, если $z + 2\overline{z} = 3 + \mathrm{i}$.
9. Изобразите на комплексной плоскости множество всех комплексных чисел, для которых $\mathrm{Re}\left(\dfrac{3}{z}\right) \geqslant \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z} - 1\right)$.
10. Множество точек комплексной плоскости определено условием $|z + 4 - 3\mathrm{i}| \leqslant 1$. Какова область изменения выражения $\dfrac{\mathrm{Re}z}{\mathrm{Im}z}$?
11. Найдите сумму таких чисел z, что $z^4 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$. Найдите одно из таких чисел.
12. Найдите все действительные значения параметра a, при которых система $\begin{cases} 2\mathrm{i}(z+\overline{z})^2 = z - \overline{z} \\ |z - \mathrm{i}\cdot a| = \dfrac{a^3}{10^2} \end{cases}$ имеет только три решения.
13. При каких значениях параметра b среди комплексных чисел, таких, что $|z - 2 - 2\mathrm{i}| \leqslant b$ существует только одно такое, что $z^3 \in \mathbb{R}$.
14. Среди чисел z, удовлетворяющих условию $z \cdot \overline{z} = 25$, найдите такие, что $|z - 7| + |z - 7\mathrm{i}|$ принимает наименьшее значение.

Решение практикума 8

1. Найдите наибольший модуль комплексного числа z, удовлетворяющего неравенству $|zi - 3i + 4| \leqslant |i|$.

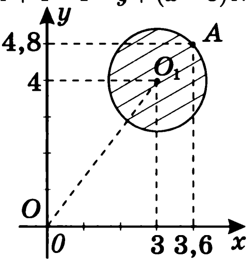
Пусть $z = x + yi$, значит,

$$zi - 3i + 4 = (x + yi)i - 3i + 4 = xi + yi^2 - 3i + 4 = 4 - y + (x - 3)i.$$

Тогда $|(4 - y) + (x - 3)i| \leqslant |i|$, т. е.

$$\sqrt{(4-y)^2 + (x-3)^2} \leqslant \sqrt{1^2} \quad \text{или}$$

$$(4-y)^2 + (x-3)^2 \leqslant 1.$$



Геометрически — это круг радиуса $R = 1$ и с центром $O_1(3; 4)$.

Так как $OO_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ и $O_1A = 1$, то $OA = 6$.

Ответ: наибольший модуль комплексного числа z равен 6.

2. Найдите наименьший модуль комплексного числа z, для которого выполняется условие $|z - i| = |z + \sqrt{3}|$.

Пусть $z = x + yi$, тогда $|x + yi - i| = |x + yi + \sqrt{3}|$; $|x + (y - 1)i| = |(x + \sqrt{3}) + yi|$, значит, $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x + \sqrt{3})^2 + y^2}$, т. е.

$$x^2 + (y-1)^2 = (x + \sqrt{3})^2 + y^2.$$

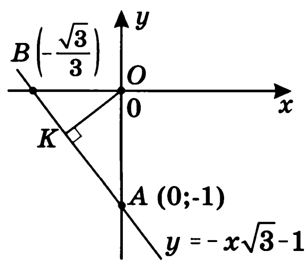
Отсюда получим $y = -x\sqrt{3} - 1$. Наименьшее расстояние от точки $O(0; 0)$ до прямой $y = -x\sqrt{3} - 1$ — это и есть наименьший модуль комплексного числа z при данных условиях. Вопрос этот решим геометрически.

Имеем: $OK \perp AB$, где $AB = \sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Далее, $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $OA = 1$. Методом площадей получим:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OB \cdot OA = \frac{1}{2} AB \cdot OK,$$

$$OK = \frac{OB \cdot OA}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$



Ответ: наименьший модуль комплексного числа z, для которого $|z - i| = |z + \sqrt{3}|$, равен $\frac{1}{2}$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z+2\mathrm{i}}{z+4\mathrm{i}}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z+2\mathrm{i}}{z-1}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Полагая $z = x + y\mathrm{i}$ и учитывая равенство $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, получим

$$\begin{cases} |x+y\mathrm{i}+2\mathrm{i}| = |x+y\mathrm{i}+4\mathrm{i}| \\ |x+y\mathrm{i}+2\mathrm{i}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|x+y\mathrm{i}-1| \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2+(y+2)^2 = x^2+(y+4)^2 \\ x^2+(y+2)^2 = \dfrac{1}{2}((x-1)^2+y^2) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4y+4 = 8y+16 \\ 2x^2+2y^2+8y+8 = x^2-2x+1+y^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y=-3 \\ x^2+2x+y^2+8y+7=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=-3 \\ x^2+2x-8=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $(-4;-3)$; $(2;-3)$ или $z_1 = -4-3\mathrm{i}$; $z_2 = 2-3\mathrm{i}$.

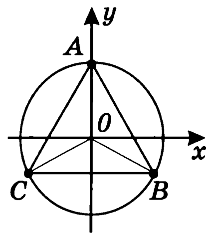
4. Изобразите комплексные числа z, для которых $z^3 = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.
Учитывая, что

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2} = \frac{1-2\mathrm{i}-1}{1+1} = -\mathrm{i},$$

получим $z^3 = -\mathrm{i}$. Можно решить вопрос, используя формулу корня n-й степени из комплексного числа z (теорему Муавра). Но в данном случае можно воспользоваться тем, что $-\mathrm{i} = \mathrm{i}^3$. Тогда $z^3 = \mathrm{i}^3$;

$$(z-\mathrm{i})(z^2+z\mathrm{i}+\mathrm{i}^2) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} z=\mathrm{i} \\ z^2+z\mathrm{i}-1=0 \end{array}\right.;$$

$$z_1 = \mathrm{i}; \quad z_{2,3} = \frac{-\mathrm{i}\pm\sqrt{\mathrm{i}^2+4}}{2} = \frac{-\mathrm{i}\pm\sqrt{3}}{2}.$$



Найденным числам соответствуют точки

$$A(0;1); \quad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right); \quad C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

Так как корни n-й степени из комплексного числа есть координаты вершин правильного n-угольника, то точки A, B, C суть вершины правильного треугольника, где $R_0 = 1$.

5. Изобразите комплексные числа z, удовлетворяющие условию

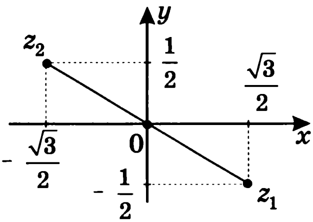
$$z^2 = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}}.$$

Так как

$$\frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{\sqrt{3} + \mathrm{i}} = \frac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i})}{(\sqrt{3} + \mathrm{i})(\sqrt{3} - \mathrm{i})} = \frac{3 - 2\sqrt{3}\mathrm{i} + \mathrm{i}^2}{3 - \mathrm{i}^2} = \left(\frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{2}\right)^2,$$

то $z^2 = \left(\frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{2}\right)^2$.

Значит, $\left[\begin{array}{l} z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \\ z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \end{array}\right.$.



Итак, $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$; $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ ($z_2 = -z_1$).

6. Даны два комплексных числа $z_1 = 3 + 4\mathrm{i}$ и $z_2 = -4 + 3\mathrm{i}$. При каких действительных значениях a и b выполняется условие

$$\frac{z_1}{z_2} = az_1 + bz_2?$$

Имеем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4\mathrm{i}}{-4 + 3\mathrm{i}} = \frac{(3 + 4\mathrm{i})(-4 - 3\mathrm{i})}{(-4 + 3\mathrm{i})(-4 - 3\mathrm{i})} =$$

$$= \frac{-12 - 16\mathrm{i} - 9\mathrm{i} - 12\mathrm{i}^2}{(-4)^2 - (3\mathrm{i})^2} = \frac{-25\mathrm{i}}{16 - 9\mathrm{i}^2} = \frac{-25}{25}\mathrm{i} = -\mathrm{i}.$$

Тогда $-\mathrm{i} = a(3 + 4\mathrm{i}) + b(-4 + 3\mathrm{i})$;

$$-\mathrm{i} = 3a + 4a\mathrm{i} - 4b + 3b\mathrm{i} = (3a - 4b) + (4a + 3b)\mathrm{i}.$$

Из условия равенства двух комплексных чисел получим систему уравнений

$$\begin{cases} 3a - 4b = 0 \\ 4a + 3b = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = \frac{4}{3}b \\ 4 \cdot \frac{4}{3}b + 3b = -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3}b \\ \frac{25}{3}b = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = -\frac{4}{25} = -0{,}16 \\ b = -\frac{3}{25} = -0{,}12 \end{cases}.$$

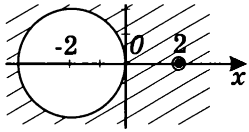
Ответ: $a = -0{,}16$; $b = -0{,}12$.

7. Изобразите множество точек комплексной плоскости, если

$$\frac{|z+1|}{|z-2|} \geqslant 0{,}5.$$

Пусть $z = x + y\mathrm{i}$, тогда $|x + y\mathrm{i} + 1| \geqslant |x + y\mathrm{i} - 2| \cdot \frac{1}{2}$; $(z \neq 2)$;
$\left|(x+1) + y\mathrm{i}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left|(x-2) + y\mathrm{i}\right|$, значит,

$$4((x+1)^2 + y^2) \geqslant (x-2)^2 + y^2;$$
$$(4(x+1)^2 - (x-2)^2) + 3y^2 \geqslant 0;$$
$$3x^2 + 12x + 3y^2 \geqslant 0;$$
$$x^2 + 4x + y^2 \geqslant 0;$$
$$(x+2)^2 + y^2 \geqslant 2^2.$$



Этому неравенству удовлетворяют все точки комплексной плоскости вне круга с центром $O(-2;0)$ радиусом $R = 2$, включая границу и исключая точку $z = 2$, т. е. $(2;0)$.

8. Найдите z^{12}, если $z + 2\overline{z} = 3 + \mathrm{i}$.
Пусть $z = x + y\mathrm{i}$, значит, $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$. Тогда имеем:

$$x + y\mathrm{i} + 2(x - y\mathrm{i}) = 3 + \mathrm{i};$$
$$3x - y\mathrm{i} - \mathrm{i} - 3 = 0;$$
$$3(x-1) - (y+1)\mathrm{i} = 0;$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \quad \text{т. е.} \quad z = 1 - \mathrm{i}.$$

Далее,

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

поскольку $\begin{cases} \cos\varphi_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, и значит, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$.

Зная, что $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, находим

$$z^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} \cdot 12\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4} \cdot 12\right)\right) =$$
$$= 2^6(\cos(-3\pi) + \mathrm{i}\sin(-3\pi)) = 64(-1 + 0) = -64.$$

О т в е т: $z^{12} = -64$.

9. Изобразите на комплексной плоскости множество всех комплексных чисел, для которых $\mathrm{Re}\left(\frac{3}{z}\right) \geqslant \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z} - 1\right)$.

Пусть $z = x + y\mathrm{i}$.

а) Вычислим $\mathrm{Re}\left(\frac{3}{z}\right)$. Будем иметь

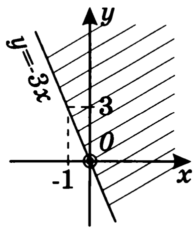
$$\frac{3}{x+y\mathrm{i}} = \frac{3(x-y\mathrm{i})}{(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})} = \frac{3(x-y\mathrm{i})}{x^2-y^2\mathrm{i}^2} =$$
$$= \frac{3(x-y\mathrm{i})}{x^2+y^2} = \frac{3x}{x^2+y^2} - \frac{3y\mathrm{i}}{x^2+y^2}.$$

Тогда $\mathrm{Re}\left(\frac{3}{z}\right) = \frac{3x}{x^2+y^2}$.

б) Найдем теперь $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z} - 1\right)$. Имеем:

$$\frac{1}{z} - 1 = \frac{1}{x+y\mathrm{i}} - 1 = \frac{x-y\mathrm{i}}{x^2+y^2} - 1 = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 1\right) - \frac{y\mathrm{i}}{x^2+y^2};$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z} - 1\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$



Таким образом, заданное условие принимает вид

$$\frac{3x}{x^2+y^2} \geqslant \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Искомое множество — полуплоскость $y \geqslant -3x$, с исключенной точкой $O(0;0)$.

10. Множество точек комплексной плоскости определено условием $|z+4-3\mathrm{i}| \leqslant 1$. Какова область изменения выражения $\frac{\mathrm{Re}z}{\mathrm{Im}z}$?

Пусть $z = x + y\mathrm{i}$, тогда $\mathrm{Re}z = x$, а $\mathrm{Im}z = y$ и $\frac{\mathrm{Re}z}{\mathrm{Im}z} = \frac{x}{y} = k$. Далее, имеем

$$z + 4 - 3\mathrm{i} = x + y\mathrm{i} + 4 - 3\mathrm{i} = x + 4 + (y-3)\mathrm{i};$$
$$|z+4-3\mathrm{i}| = |(x+4)+(y-3)\mathrm{i}| = \sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2} \leqslant 1.$$

Геометрически, множество

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 \leqslant 1$$

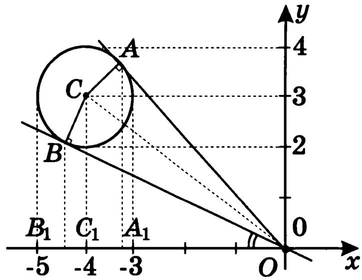
представляет собой круг радиуса $R = 1$ с центром в точке $C(-4;3)$. Следовательно, получаем

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-3)^2 \leqslant 1 \\ y = \frac{1}{k}x \end{cases}.$$

Возможна следующая геометрическая интерпретация: пусть OA и OB — касательные к окружности

$$(x+4)^2+(y-3)^2=1,$$

тогда диапазон изменения величины $\frac{1}{k}$ ограничен угловыми коэффициентами прямых OA и OB.



$$\operatorname{tg}(\pi-\angle BOB_1)\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\operatorname{tg}(\pi-\angle AOA_1);$$

$$\operatorname{tg}(-\angle BOB_1)\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\operatorname{tg}(-\angle AOA_1);$$

$$\left[\begin{array}{ll}\frac{\pi}{2}<\pi-\angle BOB_1<\pi; & \operatorname{tg}(\pi-BOB_1)<0;\\ \frac{\pi}{2}<\pi-\angle AOA_1<\pi; & \operatorname{tg}(\pi-AOA_1)<0.\end{array}\right]$$

Имеем $OC=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$; $AC=1$; $\sin(\angle COA)=\frac{1}{5}$; $\angle COA=$ $=\arcsin\frac{1}{5}$; $\operatorname{tg}(\angle COC_1)=\frac{3}{4}$; $\angle COC_1=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Значит,

$$\angle AOA_1=\angle COA+\angle COC_1=\arcsin\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{3}{4};$$

$$\angle BOB_1=\angle COC_1-\angle COA=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\arcsin\frac{1}{5}.$$

Поэтому $-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\arcsin\frac{1}{5}\right)\leqslant\frac{1}{k}\leqslant-\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.
Найдем числовые выражения для границ диапазона:

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)=\frac{\sin\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)}}=\frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1-\frac{1}{25}}}=\frac{1}{\sqrt{24}};$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\arcsin\frac{1}{5}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{\sqrt{24}}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{24}}}=\frac{3\sqrt{24}-4}{4\sqrt{24}+3}=\frac{6\sqrt{6}-4}{8\sqrt{6}+3}=\frac{(6\sqrt{6}-4)(8\sqrt{6}-3)}{(8\sqrt{6})^2-3^2}=$$

$$=\frac{48\cdot6-50\sqrt{6}+12}{64\cdot6-9}=\frac{12\cdot25-50\sqrt{6}}{3\cdot125}=\frac{12-2\sqrt{6}}{3\cdot5}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{6-\sqrt{6}}{5}=\frac{2\cdot30}{3\cdot5(6+\sqrt{6})}=\frac{4}{6+\sqrt{6}}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\arcsin\frac{1}{5}\right)=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{\sqrt{24}}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{24}}}=\frac{3\sqrt{24}+4}{4\sqrt{24}-3}=\ldots=\frac{4}{6-\sqrt{6}}.$$

Итак, $-\dfrac{4}{6+\sqrt{6}}\leqslant\dfrac{1}{k}\leqslant-\dfrac{4}{6-\sqrt{6}}$, значит, $-\dfrac{6-\sqrt{6}}{4}\geqslant k\geqslant-\dfrac{6+\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: для множества комплексных чисел, соответствующих условию $|z+4-3\mathrm{i}|\leqslant 1$, областью изменения выражения $\dfrac{\operatorname{Re}z}{\operatorname{Im}z}$ является интервал $\left[-\dfrac{6+\sqrt{6}}{4};-\dfrac{6-\sqrt{6}}{4}\right]$.

11. Найдите сумму всех таких чисел z, что $z^4=\sqrt{3}-\mathrm{i}$. Найдите одно из таких чисел.

а) По теореме Виета сумма $z_1+z_2+z_3+z_4$ корней уравнения

$$z^4+A_1z^3+A_2z^2+A_3z+A_4=0$$

равна коэффициенту A_1. Так как в рассматриваемом случае $A_1=0$, то $z_1+z_2+z_3+z_4=0$.

б) Найти одно из чисел, для которых $z^4=\sqrt{3}-\mathrm{i}$, по сути, означает найти один из корней уравнения.

Пусть $\sqrt{3}-\mathrm{i}=z_0$. Тогда $|z_0|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$;

$$z_0=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right),$$

так как $\begin{cases}\cos\varphi_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi_0=-\frac{1}{2}\end{cases}$ и $\varphi_0=\dfrac{11\pi}{6}$. Тогда

$$z=\sqrt[4]{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{4}\right),$$

где $k\in\{0;1;2;3\}$. Например, при $k=0$ получаем

$$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{24}\right).$$

12. Найдите все действительные значения параметра a, при которых система $\begin{cases}2\mathrm{i}(z+\overline{z})^2=z-\overline{z}\\ |z-\mathrm{i}\cdot a|=\dfrac{a^3}{10^2}\end{cases}$ имеет только три решения.

Очевидно, что при $a<0$ второе уравнение решений не имеет. При $a=0$ существует единственное решение $z=0$.

Пусть $a>0$. Полагая $z=x+y\mathrm{i}$, где $x,y\in\mathbb{R}$ получим, что $\overline{z}=x-y\mathrm{i}$. Тогда первое уравнение примет вид

$$2\mathrm{i}(x+y\mathrm{i}+x-y\mathrm{i})^2=x+y\mathrm{i}-(x-y\mathrm{i}) \quad \text{или} \quad 2\mathrm{i}\cdot 4x^2=2y\mathrm{i}.$$

Таким образом, $y=4x^2$, значит, $z=x+4x^2\cdot\mathrm{i}$.
Подставляя $z=x+4x^2\cdot\mathrm{i}$ во второе уравнение, получим

$$|x+4x^2\cdot\mathrm{i}-\mathrm{i}\cdot a|=\frac{a^3}{10^2};$$

$$|x+(4x^2-a)\mathrm{i}|=\sqrt{x^2+(4x^2-1)}=\frac{a^3}{10^2}.$$

Тогда $x^2+(4x^2-a)^2=\frac{a^6}{10^4}$. Здесь мы имеем дело с биквадратным уравнением, которое имеет три решения лишь в случае, когда один из его корней равен нулю. Подставив $x=0$ в уравнение, получим $0+a^2=\frac{a^6}{10^4}$, т.е. $10^4a^2=a^6$; $10^4=a^4$. Ранее было определено, что решение возможно только при $a>0$. Значит, $a=10$.
При $a=10$ уравнение примет вид

$$x^2+(4x^2-10)^2=10^2.$$

Преобразуя его, получим: $16x^4-79x^2=0$; $\left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=79 \end{array}\right.$.

Очевидно, что в этом случае уравнение имеет только три корня. Значит и рассматриваемая система уравнений при $a=10\in\mathbb{R}$ имеет только три решения.

Ответ: $a=10$.

13. При каких значениях параметра b среди комплексных чисел, таких, что $|z-2-2\mathrm{i}|\leqslant b$ существует только одно такое, что $z^3\in\mathbb{R}$.
Пусть $z=x+y\mathrm{i}$; $z^3=(x+y\mathrm{i})^3$; $z^3=x^3+3x^2y\mathrm{i}+3xy^2\mathrm{i}^2+y^3\mathrm{i}^3$, т.е. $z^3=(x^3-3xy^2)+(3x^2-y^3)\mathrm{i}$.

Так как $z^3\in\mathbb{R}$, то $3x^2y-y^3=0$; $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=x\sqrt{3} \\ y=-x\sqrt{3} \end{array}\right.$.

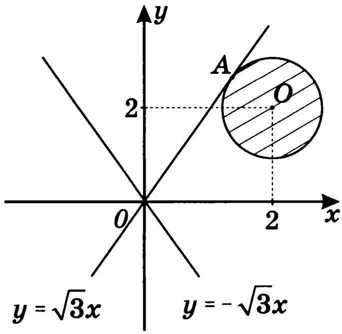
Так как $|z-2-2\mathrm{i}|\leqslant b$, то $b\geqslant 0$. Далее,

$$|z-2-2\mathrm{i}|=|(x-2)+(y-2)\mathrm{i}|=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}\leqslant b.$$

Таким образом, исходное неравенство принимает вид

$$(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant b^2.$$

Геометрически, это множество точек комплексной плоскости представляет собой круг радиуса $R=b$ с центром в точке $O(2;2)$. Для того чтобы существовало единственное комплексное z, необходимо чтобы было касание с прямой $y=\sqrt{3}x$, или с прямой $y=-\sqrt{3}x$, или с прямой $y=0$. Из графической интерпретации условий задачи ясно, что касание возможно только с прямой $y=\sqrt{3}x$. Тогда



$$\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ (x-2)^2+(y-2)^2=b^2 \end{cases};$$

$$(x-2)^2+(\sqrt{3}x-2)^2=b^2;$$

$$x^2-4x+4+3x^2-4\sqrt{3}x+4=b^2;$$

$$4x^2-4(1+\sqrt{3})x+8-b^2=0.$$

Для того, чтобы это уравнение имело единственное решение, необходимо, чтобы дискриминант D был равен нулю. Получаем:

$$D=4(1+\sqrt{3})^2-4(8-b^2)=0;$$

$$1+2\sqrt{3}+3-8+b^2=0;$$

$$b^2=4-2\sqrt{3},$$

причем $b\geqslant 0$. Следовательно, $b=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$; $b=\sqrt{3}-1$. Проверим, будет ли число z_0 удовлетворять условию $z_0^3\in\mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$4x^2-4(1+\sqrt{3})x+4+2\sqrt{3}=0 \quad (4+2\sqrt{3}=8-b^2).$$

Так как $D=0$, то $x_0=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\left(x_0=-\frac{b}{2a}\right)$; значение y_0 найдем из первого уравнения системы: $y=\sqrt{3}x$; $y_0=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}$.

Значит, $z_0=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}\mathrm{i}$;

$$|z_0|=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}{2}=\sqrt{3}+1;$$

$$z_0=(\sqrt{3}+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right).$$

Поскольку $\begin{cases} \cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; $\varphi_0 = \frac{\pi}{3} \in [0; 2\pi)$, мы получаем

$$z_0 = (\sqrt{3}+1)\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$z_0^3 = (\sqrt{3}+1)^3(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -(\sqrt{3}+1)^3 \in \mathbb{R},$$

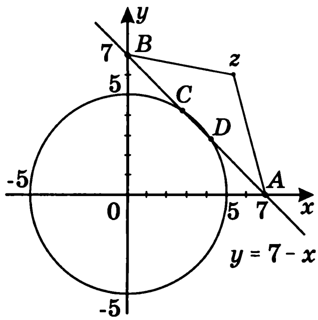
что и требуется.

Ответ: $b = \sqrt{3} - 1$.

14. Среди чисел z, удовлетворяющих условию $z \cdot \overline{z} = 25$ найдите такие, что $|z-7| + |z-7\mathrm{i}|$ принимает наименьшее значение.

1) Пусть $z = x + y\mathrm{i}$, тогда уравнение примет вид

$$(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i}) = 25;$$
$$x^2 - y^2\mathrm{i}^2 = 25;$$
$$x^2 + y^2 = 25.$$



Это уравнение окружности радиуса $R = 5$ с центром в точке $O(0;0)$.

2) $|z-7|$ — это расстояние от точки $A(7;0)$ до точки $z(x;y)$ или $|Bz|$; аналогично, $|z-7\mathrm{i}|$ — это расстояние от точки $B(0;7)$ до точки $z(x;y)$ или $|Az|$.

3) Так как $|AB| \leqslant |Bz| + |Cz|$, то точка $z(x;y)$ должна принадлежать прямой AB, чтобы сумма $|z-7| + |z-7\mathrm{i}|$ была наименьшей.

4) С другой стороны, число z должно быть корнем уравнения $z \cdot \overline{z} = 25$, т.е. уравнения $x^2 + y^2 = 25$.

Итак, для нахождения z необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 7 - x \end{cases}.$$

Имеем: $x^2 + (7-x)^2 = 25$; $x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$; $2x^2 - 14x + 24 = 0$; $x^2 - 7x + 12 = 0$, откуда $x_1 = 3$; $x_2 = 4$. Тогда

а) $x_1 = 3$; $y_1 = 4$; $z_1 = 3 + 4\mathrm{i}$;

б) $x_2 = 4$; $y_2 = 3$; $z_2 = 4 + 3\mathrm{i}$.

Ответ: $z_1 = 3 + 4\mathrm{i}$, $z_2 = 4 + 3\mathrm{i}$.

Практикум 9

1. Решите уравнение $z^2 - 3z + 4 = 0$.
2. Число $x_1 = \left(\sin\frac{5\pi}{8} + \mathrm{i}\cos\frac{5\pi}{8}\right)^4$ является корнем уравнения

$$x^3 + (a-2)x^2 + a^2x - 2a^2 - 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Найдите остальные корни.

3. Число $x_1 = \mathrm{i}$ является одним из корней уравнения

$$x^4 - (2a+b+1)x^3 + (3a+5b)x^2 - 8x + 13 = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Найдите остальные корни уравнения.

4. Дано: $\frac{1}{z} + z = 1$, где z — комплексное число. Найдите z^{20}.
5. Решите уравнение

$$z^4 - (2-4\mathrm{i})z^2 - (1-\mathrm{i})^6 = 0.$$

6. Число $x_1 = \dfrac{27\sqrt{6}}{\left(\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{28} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{28}\right)\right)^7}$ является корнем уравнения

$$x^3 - 2(a-1)x^2 + 2(1-2a)x - 4a = 0.$$

Найдите остальные корни уравнения.

7. Решите уравнение $12x^4 + 37x^3 + 49x^2 + 37x + 12 = 0$.
8. Для уравнения

$$z^2 - (\overline{z})^2 = 16\mathrm{i}$$

найдите корни, для которых выражение $|z-5| + |z-5\mathrm{i}|$ принимает наименьшее значение.

9. Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} |z-1-\mathrm{i}| \leqslant |z+1+\mathrm{i}| \\ |z+2\mathrm{i}| \leqslant \sqrt{2} \end{cases}.$$

10. Известно, что $2 \leqslant |z+1-\mathrm{i}| \leqslant 3$. Изобразите множество точек комплексной плоскости, соответствующих числу $\overline{z}$.

Решение практикума 9

1. Решите уравнение $z^2-3z+4=0$.
Пользуясь обычной формулой, получаем

$$z_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}.$$

2. Число $x_1=(\sin\frac{5\pi}{8}+\mathrm{i}\cos\frac{5\pi}{8})^4$ является корнем уравнения

$$x^3+(a-2)x^2+a^2x-2a^2-1=0,\quad a\in\mathbb{R}.$$

Найдите остальные корни.
Имеем:

$$\left(\sin\frac{5\pi}{8}+\mathrm{i}\cos\frac{5\pi}{8}\right)^4=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right)^4=$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{8}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)^4=\left(\cos\left(\pi-\frac{7\pi}{8}\right)-\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{8}\right)\right)^4=$$
$$=\left(-\cos\frac{7\pi}{8}-\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{8}\right)^4=\left(\cos\frac{7\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{8}\right)^4=$$
$$=\cos\left(4\cdot\frac{7\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\sin\left(4\cdot\frac{7\pi}{8}\right)=\cos\frac{7\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{2}=0-\mathrm{i}=-\mathrm{i}.$$

Итак, $x_1=-\mathrm{i}$.
Замечание: $\sin\frac{5\pi}{8}+\mathrm{i}\cos\frac{5\pi}{8}$ тригонометрической формой комплексного числа не является, а $\cos\frac{7\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{8}$ — является.
Поскольку x_1 — корень уравнения, мы имеем

$$x_1^3+(a-2)x_1^2+a^2x_1-2a^2-1=0;$$
$$(-\mathrm{i})^3+(a-2)(-\mathrm{i})^2+a^2(-\mathrm{i})-2a^2-1=0;$$
$$\mathrm{i}-(a-2)-a^2\mathrm{i}-2a^2-1=0;$$
$$-(2a^2+a-2+1)+(1-a^2)\mathrm{i}=0,$$

что возможно только если $\begin{cases}2a^2+a-1=0\\1-a^2=0\end{cases}$, т. е. только при $a=-1$.
При $a=-1$ уравнение примет вид

$$x^3-3x^2+x-3=x^2(x-3)+(x-3)=(x^2+1)(x-3)=0.$$

Значит, $x_2=\mathrm{i}$, а $x_3=3$.
Итак, $\{-\mathrm{i};\mathrm{i};3\}$ — множество всех корней уравнения.

3. Число $x_1 = \mathrm{i}$ является одним из корней уравнения

$$x^4 - (2a + b + 1)x^3 + (3a + 5b)x^2 - 8x + 13 = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Найдите остальные корни уравнения.
Так как x_1 — корень уравнения, то

$$\mathrm{i}^4 - (2a + b + 1)\mathrm{i}^3 + (3a + 5b)\mathrm{i}^2 - 8\mathrm{i} + 13 = 0;$$
$$1 + (2a + b + 1)\mathrm{i} - (3a + 5b) - 8\mathrm{i} + 13 = 0;$$
$$(14 - 3a - 5b) + (2a + b - 7)\mathrm{i} = 0,$$

что возможно только при

$$\begin{cases} 14 - 3a - 5b = 0 \\ -7 + 2a + b = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \boxed{1} \\ \boxed{2} \cdot 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 14 - 3a - 5b = 0 \\ -14 + 4a + 2b = 0 \end{cases}; \quad \boxed{1} + \boxed{2};$$

$a - 3b = 0$; $a = 3b$. Тогда $-7 + 6b + b = 0$; $b = 1$, значит, $a = 3$.
Исходное уравнение примет вид $x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x + 13 = 0$.
Известно, что если некоторое комплексное число является корнем уравнения с *действительными* коэффициентами, то и сопряженное с ним комплексное число также является корнем уравнения. Мы имеем $x_1 = \mathrm{i}$, значит, $x_2 = -\mathrm{i}$; $(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) = x^2 - \mathrm{i}^2 = x^2 + 1$. Чтобы найти остальные корни, поделим многочлен на $x^2 + 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 13 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{x^4 + 0x^3 + x^2 } & x^2 - 8x + 13 \\ -8x^3 + 13x^2 - 8x + 13 & \\ \underline{-8x^3 + 0x^2 - 8x } & \\ 13x^2 + 0x + 13 & \\ \underline{13x^2 + 0x + 13} & \end{array}$$

Уравнение $x^2 - 8x + 13 = 0$ имеет корни $x_{3,4} = 4 \pm \sqrt{16 - 13} = 4 \pm \sqrt{3}$.
Ответ: $\{\pm\, \mathrm{i}; 4 \pm \sqrt{3}\}$ — множество всех корней уравнения.

4. $\frac{1}{z} + z = 1$, где z — комплексное число. Найдите z^{20}.

Решим уравнение $\frac{1}{z} + z = 1$. Будем иметь

$$z^2 - z + 1 = 0; \quad z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

а) Вычислим z_1^{20}:

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3};$$

$$z_1^{20} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^{20} = \cos\left(20\cdot\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(20\cdot\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

б) Вычислим z_2^{20}:

$$z_2 = \frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3};$$

$$z_2^{20} = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)^{20} = \cos\left(20\cdot\frac{5\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(20\cdot\frac{5\pi}{3}\right) =$$
$$= \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Ответ: для уравнения $\frac{1}{z} + z = 1$ множество значений z^{20} есть $\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

5. Решить уравнение $z^4 - (2-4\mathrm{i})z^2 - (1-\mathrm{i})^6 = 0$.

Имеем: $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

$$(1-\mathrm{i})^6 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^6 =$$
$$= 8\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 6\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 6\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8\mathrm{i}.$$

Корни уравнения $z^4 - 2(1-2\mathrm{i})z^2 - 8\mathrm{i} = 0$:

$$(z^2)_{1,2} = 1 - 2\mathrm{i} \pm \sqrt{(1-2\mathrm{i})^2 + 8\mathrm{i}} = 1 - 2\mathrm{i} \pm \sqrt{1 - 4\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2 + 8\mathrm{i}} =$$
$$= 1 - 2\mathrm{i} \pm \sqrt{1 + 4\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2} = 1 - 2\mathrm{i} \pm (1 + 2\mathrm{i});$$

$$\left[\begin{aligned} &z^2 = 2\\ &z^2 = -4\mathrm{i} \end{aligned}\right.; \qquad \left[\begin{aligned} &z = \sqrt{2}\\ &z = -\sqrt{2}\\ &z = 2\sqrt{-\mathrm{i}} \end{aligned}\right.;$$

Далее, $-\mathrm{i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

$$\sqrt{-\mathrm{i}} = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{2} =$$
$$= \cos\frac{3\pi + 4\pi k}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi + 4\pi k}{4}.$$

При $k = 0; 1$ получим

$$k = 0, \quad z_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i};$$
$$k = 1, \quad z_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

О т в е т: $\left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

6. Число $x_1 = \dfrac{27\sqrt{6}}{\left(\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{28} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{28}\right)\right)^7}$ является корнем уравнения

$$x^3 - 2(a-1)x^2 + 2(1-2a)x - 4a = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Найдите остальные корни уравнения.

Комплексное число $\sin\frac{\pi}{28} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{28}$ представим в тригонометрической форме:

$$\sin\frac{\pi}{28} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{28} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{13\pi}{28}\right) + \mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{13\pi}{28}\right) =$$
$$= \cos\frac{13\pi}{28} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{28}.$$

Тогда

$$\left(\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{28} + \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{28}\right)\right)^7 = 27\sqrt{3}\left(\cos\frac{13\pi}{28} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{28}\right) =$$
$$= 27\sqrt{3}\left(\cos\left(7\cdot\frac{13\pi}{28}\right) + \mathrm{i}\sin\left(7\cdot\frac{13\pi}{28}\right)\right) =$$
$$= 27\sqrt{3}\left(\cos\frac{13\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{4}\right) = -27\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right).$$

Значит, $x_1 = -\dfrac{27\sqrt{6}}{27\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})} = -\dfrac{2}{1+\mathrm{i}} = -\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}^2} = -1 + \mathrm{i}$.

Так как коэффициенты уравнения действительные, то корнем уравнения является также число $x_2 = \overline{x}_1 = -1 - \mathrm{i}$. Мы имеем

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - (-1 + \mathrm{i}))(x - (-1 - \mathrm{i})) =$$
$$= x^2 - x(-1 + \mathrm{i}) + x(1 + \mathrm{i}) - (\mathrm{i}^2 - 1) = x^2 + 2x + 2.$$

Значит, $x^3 - 2(a-1)x^2 + 2(1-2a)x - 4a$ кратно $x^2 + 2x + 2$. Произведем деление:

$$\begin{array}{llll|l}
x^3 - & 2(a-1)x^2 + & 2(1-2a)x - & 4a & x^2 + 2x + 2 \\ \cline{5-5}
\underline{x^3 +} & \underline{2x^2 +} & \underline{2x} & & x - 2a \\
 & -2ax^2 - & 4ax - & 4a & \\
 & \underline{-2ax^2 -} & \underline{4ax -} & \underline{4a} &
\end{array}$$

Таким образом, уравнение имеет корни $\left[\begin{array}{l} x=-1+\mathrm{i} \\ x=-1-\mathrm{i} \\ x=2a \end{array}\right.$.

Заметим, что корни x_1 и x_2 не зависят от параметра a, поскольку многочлен разделился на x^2+2x+2 без остатка.

Ответ: $\{-1+\mathrm{i};-1-\mathrm{i};-2a\}$ — множество всех корней уравнения $x^3-2(a-1)x^2+2(1-2a)x-4a=0$.

7. Решите уравнение $12x^4+37x^3+49x^2+37x+12=0$.

Это так называемое *возвратное уравнение.* Разделив его на x^2, получим

$$12x^2+37\left(x+\frac{1}{x}\right)+49+\frac{12}{x^2}=0.$$

Сделаем замену $x+\frac{1}{x}=t$. Тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ и уравнение принимает вид

$$12(t^2-2)+37t+49=0; \quad 12t^2+37+25=0.$$

Найдем корни: $t_{1,2}=\frac{-37\pm\sqrt{37^2-4\cdot12\cdot25}}{24}=\frac{-37\pm\sqrt{1369-1200}}{24}=$ $=\frac{-37\pm13}{24}$. Далее,

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{-37-13}{24} \\ t=\frac{-37+13}{24} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} t=2\frac{1}{12} \\ t=-1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{12} \\ x+\frac{1}{x}=-1 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} 12x^2-25x+12=0 \\ x^2+x+1=0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{25^2-576}}{24} \\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{25+7}{24} \\ x_2=\frac{25-7}{24} \\ x_3=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \\ x_4=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{3}{4};1\frac{1}{3};-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

8. Для уравнения $z^2-(\overline{z})^2=16\mathrm{i}$ найдите корни, для которых выражение $|z-5|+|z-5\mathrm{i}|$ принимает наименьшее значение.

а) Пусть $z=x+y\mathrm{i}$, тогда уравнение примет вид

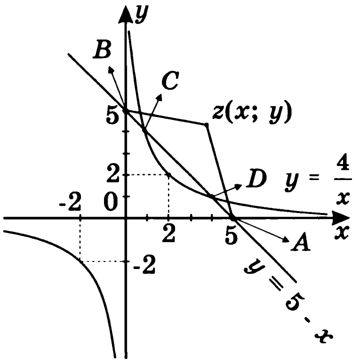
$$(x+y\mathrm{i})^2-(x-y\mathrm{i})^2=16\mathrm{i};$$

$$\underline{x^2}+2xy\mathrm{i}+\underline{\underline{y^2\mathrm{i}^2}}-\underline{x^2}+2xy\mathrm{i}-\underline{\underline{y^2\mathrm{i}^2}}=16\mathrm{i};$$

$$4xy\mathrm{i}=16\mathrm{i}; \quad xy=4$$

или $y=\frac{4}{x}$.

б) $|z-5|$ — расстояние от точки $A(5;0)$ до точки $z(x;y)$;
$|z-5\mathrm{i}|$ — расстояние от точки $B(0;5)$ до точки $z(x;y)$.
Наименьшее значение $|z-5|+|z-5\mathrm{i}|$ как сумма расстояний будет принимать, если точка $z(x;y)$ принадлежит прямой AB, так как $AB \leqslant Az + Bz$. С другой стороны, уравнение $z^2-(\overline{z})^2=16\mathrm{i}$, как мы выяснили, эквивалентно уравнению $xy=4$. Значит, только точки плоскости, которые одновременно принадлежат и прямой AB, т. е. $y=5-x$, и кривой $y=\frac{4}{x}$, удовлетворяют условиям задачи.



Таким образом,

$$\begin{cases} y=5-x \\ y=\dfrac{4}{x} \end{cases}; \quad \begin{cases} y=5-x \\ 5-x=\dfrac{4}{x} \end{cases}; \quad \begin{cases} y=5-x \\ x^2-5x+4=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=5-x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

При $x=1$; $y=4$ получаем решение $z_1=1+4\mathrm{i}$, при $x=4$; $y=1$ — решение $z_2=4+\mathrm{i}$.

Ответ: $z_1=1+4\mathrm{i}$ и $z_2=4+\mathrm{i}$.

9. Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} |z-1-\mathrm{i}| \leqslant |z+1+\mathrm{i}| \\ |z+2\mathrm{i}| \leqslant \sqrt{2} \end{cases}$.

Имеем:

$$|z-1-\mathrm{i}| = |(x-1)+(y-1)\mathrm{i}| = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2};$$
$$|z+1+\mathrm{i}| = |(x+1)+(y+1)\mathrm{i}| = \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2};$$
$$|z+2\mathrm{i}| = |x+(y+2)\mathrm{i}| = \sqrt{x^2+(y+2)^2}.$$

Система записывается в виде

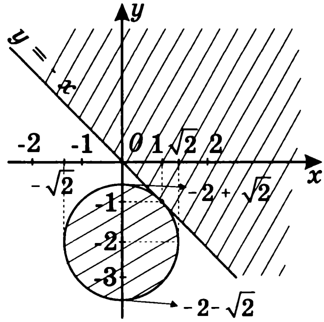
$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \leqslant \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} \\ \sqrt{x^2+(y+2)^2} \leqslant \sqrt{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant (x+1)^2+(y+1)^2 \\ x^2+(y+2)^2 \leqslant 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \leqslant x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \\ x^2 + (y+2)^2 \leqslant 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -4x \leqslant 4y \\ x^2 + (y+2) \leqslant 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y \geqslant -x \\ x^2 + (y+2)^2 \leqslant 2 \end{cases};$$



Найдем вначале точки пересечения прямой $y = -x$ и окружности радиуса $R = \sqrt{2}$ с центром в точке $(0; -2)$:

$$x^2 + (-x+2)^2 = 2;$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 2;$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0;$$

$$x = 1.$$

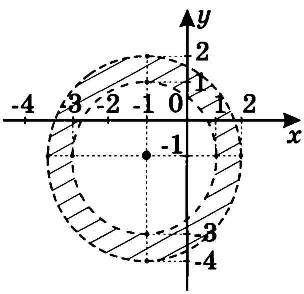
Мы видим, что существует только одна точка $(1; -1)$ удовлетворяющая условию задачи. Итак, $z = 1 - \mathrm{i}$.

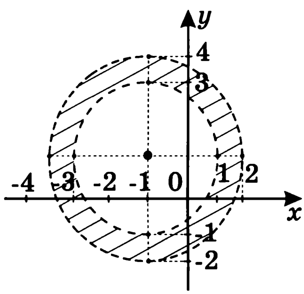
10. Известно, что $2 \leqslant |z + 1 - \mathrm{i}| \leqslant 3$. Изобразите множество точек комплексной плоскости, соответствующих числу $\bar{z}$.

Заданное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 3^2 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \geqslant 2^2 \end{cases}.$$

Геометрически это неравенство определяет множество точек кольца с центром в точке $(-1; 1)$; радиус большей окружности $R = 3$, а меньшей — $r = 2$. С другой стороны, известно, что точка $\bar{z}$ получается отражением точки z относительно оси Ox. Значит, решением задачи будут все точки кольца отраженного симметрично оси Ox.





3

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вычислите:

1. $z_1 z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 10 + \mathrm{i}$, $z_2 = 5 - 2\mathrm{i}$;
2. $\dfrac{5 - \mathrm{i}}{(1 - \mathrm{i})(2 + 3\mathrm{i})}$;
3. $(1 + \mathrm{i})^3 - (1 - \mathrm{i})^3$;
4. $(2 - \mathrm{i})^2 + (1 + \mathrm{i})^4 - \dfrac{7 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$;
5. $\dfrac{\sqrt{1+a} + \mathrm{i}\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \mathrm{i}\sqrt{1-a}} - \dfrac{\sqrt{1-a} + \mathrm{i}\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a} - \mathrm{i}\sqrt{1+a}}$;
6. $(2 + \mathrm{i})^6$;
7. $(\sqrt{3}\mathrm{i} + 1)^4 (1 + \mathrm{i})^5$;
8. $(1 - \sqrt{3}\mathrm{i})^5 : (1 - \mathrm{i})^6$;
9. $\left(\dfrac{(3 + 2\mathrm{i})(2 - \mathrm{i})}{(2 + 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}\right)^2$;
10. $\left(\dfrac{1 + 3\mathrm{i}}{\mathrm{i} + 2}\right)^2 + \left(\dfrac{4\mathrm{i} - 1}{3\mathrm{i} + 1}\right)^2$.

Самостоятельная работа 2

Заштрихуйте на плоскости множество точек плоскости, удовлетворяющих условию

1. $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$;
2. $|z-1| = |z+1|$;
3. $|z+2| < 2$;
4. $|2z-3| \geqslant 1$;
5. $\mathrm{Im}(z) > 2$;
6. $\mathrm{Re}(z) < -1$;
7. $|z-2-3\mathrm{i}| \geqslant 1$;
8. $4 \geqslant |z+2\mathrm{i}| \geqslant 3$;
9. $|z| \leqslant \mathrm{Re}(z)$;
10. $0 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant 1$.

Самостоятельная работа 3

Используя теорему Муавра, вычислите

1. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}\right)^{100}$;
2. $(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{60}$;
3. $(1+\mathrm{i})^8(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^3$;
4. $(2-2\mathrm{i})^7\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{40}((1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})\mathrm{i})$;
5. $(\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i})^5(\mathrm{i}-\sqrt{3})^9((1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\mathrm{i})$.

Изобразите множество точек комплексной плоскости

6. $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg(z) < \dfrac{\pi}{3}$;
7. $\dfrac{\pi}{3} \leqslant \arg(z+1-\mathrm{i}) < \dfrac{3\pi}{4}$;
8. $\left|\sqrt{2x-y}+\mathrm{i}\sqrt{x+2y}\right| = \sqrt{3}$;
9. $\dfrac{|z+2\mathrm{i}|}{|z-\mathrm{i}|} \geqslant 2$;
10. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}+\mathrm{i}\right) \leqslant \mathrm{Im}\left(\dfrac{2}{z}\right)$.

Самостоятельная работа 4

1. Изобразите множество точек комплексной плоскости

$$\text{а)}\ \begin{cases} \dfrac{|z-4|}{|z-2|} \geqslant 1 \\ \dfrac{|z-2\mathrm{i}|}{|z+\mathrm{i}|} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}; \qquad \text{б)}\ \begin{cases} \dfrac{|z+1|}{|z-2|} \geqslant 0{,}5 \\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) \geqslant \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}-1\right) \end{cases}.$$

2. Множество точек плоскости задано условием $|z-3-4\mathrm{i}| \leqslant 1$. Какова область изменения выражения $\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$?

3. Определите, для какого комплексного числа вида $z = x + 3x\mathrm{i}$ выражение $f(z) = \big||z-1-2\mathrm{i}| - |z-2-\mathrm{i}|\big|$ будет наибольшим.

4. Найдите наибольшее значение выражения $f(z) = \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot \left|z - \frac{1}{z}\right|$, где $z = x + y\mathrm{i}$, если $\arg\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$ и $\arg(z) \neq 0$.

Самостоятельная работа 5

1. Найдите наибольший модуль комплексного числа z, для которого справедливо неравенство $|z\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 4| \leqslant |\mathrm{i}|$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \left|\dfrac{z+2\mathrm{i}}{z+4\mathrm{i}}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z+2\mathrm{i}}{z-1}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$

3. Изобразите числа z, удовлетворяющие условию $z^3 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

4. Число $x_1 = \dfrac{32}{\left(\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right)\right)^{27}}$ — корень уравнения

$$x^3 - (b+6)x^2 + 8b^2x - 7 + b^2 = 0.$$

Найдите остальные корни.

5. Даны числа $z_1 = 3 + 2a + \mathrm{i}(a^4 + 2)$; $z_2 = 6 - a^2 + \mathrm{i}(4 - a)$. При каких a возможно равенство $z_1 = z_2$?

6. Даны числа $z_1 = 1 + a\mathrm{i}$; $z_2 = \sqrt[4]{8}\left(\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\right)$. При каких $a \in \mathbb{R}$ возможно равенство и $z_1^3 = z_2^2$?

7. $\frac{1}{z} + z = \sqrt{3}$, где z — комплексное число. Найдите z^{17}.

8. Пусть $A(2z+1)$, $B(z+2)$, $C(z^2+2z)$ — точки комплексной плоскости. При каком значении z, $|z| = 1$, площадь треугольника ABC принимает наибольшее значение?

4

Решения тренировочных работ

Решение тренировочной работы 1

Вариант I.

1. Найдите $x, y \in \mathbb{R}$, если

1) $(x - 3\mathrm{i}y) + (2y + 3\mathrm{i}x) = 1 - 2\mathrm{i}$.
Имеем: $(x + 2y) - 3(y - x)\mathrm{i} = 1 - 2\mathrm{i}$, т. е.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3(y - x) = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y = \frac{2}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y = \frac{5}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 1 - 2 \cdot \frac{5}{9} \\ y = \frac{5}{9} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{9} \\ y = \frac{5}{9} \end{cases}.$$

2) $5x - 2y + (x + y)\mathrm{i} = 4 + 5\mathrm{i}$.
Имеем:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} \boxed{1} \\ \boxed{1} + 2 \cdot \boxed{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 7x = 14 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2y = 5x - 4 \\ x = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

3) $x^2-5(x-1)+4\mathrm{i}=y\mathrm{i}-1$.
Получаем:
$$\begin{cases} x^2-5(x-1)=-1 \\ 4=y \end{cases};\ \begin{cases} x^2-5x+6=0 \\ y=4 \end{cases};\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right. ; \\ y=4 \end{cases}\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right. .$$

4) $(x^2+1)\mathrm{i}+3=x(x-2\mathrm{i})-2x$.
Имеем: $(x^2+1)\mathrm{i}+3=x^2-2x-2x\mathrm{i}$, т. е.
$$\begin{cases} x^2-2x=3 \\ x^2+1=-2x \end{cases};\ \begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ (x+1)^2=0 \end{cases};\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. ; \\ x=-1 \end{cases}\ x=-1.$$

5) $(2x-3y\mathrm{i})(2x+3y\mathrm{i})+4x\mathrm{i}=97+8\mathrm{i}$.
Находим: $4x^2-9y^2\mathrm{i}^2+4x\mathrm{i}=97+8\mathrm{i}$, откуда
$$\begin{cases} 4x^2+9y^2=97 \\ 4x=8 \end{cases};\ \begin{cases} 16+9y^2=97 \\ x=2 \end{cases};\ \begin{cases} y^2=9 \\ x=2 \end{cases};$$
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-3 \end{array}\right. ; \\ x=2 \end{cases}\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Выполните действия:

1) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{1-2\mathrm{i}-1}{1+1}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i}$.

2) $(3-2\mathrm{i})(5+4\mathrm{i})-7\mathrm{i}+1=15-10\mathrm{i}+12\mathrm{i}-8\mathrm{i}^2-7\mathrm{i}+1=$
$=15+2\mathrm{i}+8-7\mathrm{i}+1=24-5\mathrm{i}$.

3) $\dfrac{(1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{3-2\mathrm{i}}=\dfrac{2-4\mathrm{i}+\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{3-2\mathrm{i}}=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\cdot\dfrac{3+2\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}=$
$=\dfrac{12-9\mathrm{i}+8\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2}{9-4\mathrm{i}^2}=\dfrac{18-\mathrm{i}}{13}=\dfrac{18}{13}-\dfrac{1}{13}\mathrm{i}$.

4) $\dfrac{(3-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{6-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{2-3\mathrm{i}-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}=\dfrac{8-\mathrm{i}}{-1-5\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}-8}{1+5\mathrm{i}}\cdot\dfrac{1-5\mathrm{i}}{1-5\mathrm{i}}=$
$=\dfrac{\mathrm{i}+40\mathrm{i}-8-5\mathrm{i}^2}{1-25\mathrm{i}^2}=\dfrac{-3+41\mathrm{i}}{26}=-\dfrac{3}{26}+\dfrac{41}{26}\mathrm{i}$.

5) $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}-2}+\dfrac{4\mathrm{i}+1}{3\mathrm{i}-1}=\dfrac{-(1-3\mathrm{i})^2+(4\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}-2)}{(\mathrm{i}-2)(3\mathrm{i}-1)}=$
$=\dfrac{-1+6\mathrm{i}-9\mathrm{i}^2+4\mathrm{i}^2+\mathrm{i}-8\mathrm{i}-2}{3\mathrm{i}^2-6\mathrm{i}-\mathrm{i}+2}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{-1-7\mathrm{i}}=$
$=\dfrac{(2-\mathrm{i})(-1+7\mathrm{i})}{(-1)^2-49\mathrm{i}^2}=\dfrac{5+15\mathrm{i}}{50}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}\mathrm{i}$.

Вариант II.

1. Найдите $x, y \in \mathbb{R}$, если

1) $(x-2\mathrm{i}y)+(y+2\mathrm{i}x)=2-3\mathrm{i}$.
Имеем: $x+y-2(y-x)\mathrm{i}=2-3\mathrm{i}$, значит,

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2(y-x)=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=\frac{3}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \boxed{1}+\boxed{2} \\ \boxed{1}-\boxed{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y=\frac{7}{4} \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

2) $9+2(x+2y)\mathrm{i}=10\mathrm{i}-6y$.
Получаем

$$\begin{cases} -6y=9 \\ 2(x+2y)=10 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=-\frac{3}{2} \\ x=5-2y \end{cases}; \quad \begin{cases} y=-\frac{3}{2} \\ x=8 \end{cases}.$$

3) $y^2\mathrm{i}+3+\mathrm{i}=y^2+2\mathrm{i}y+2y$.
Имеем $(y^2+1)\mathrm{i}+3=y^2+2y+2\mathrm{i}y$, тогда

$$\begin{cases} 3=y^2+2y \\ y^2+1=2y \end{cases}; \quad \begin{cases} y^2+2y-3=0 \\ (y-1)^2=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=1 \end{array}\right. \\ y=1 \end{cases}; \quad y=1.$$

4) $\frac{1}{x}-4y\mathrm{i}=4+\mathrm{i}x$.
Имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{x}=4 \\ -4y=x \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ -4y=\frac{1}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=-\frac{1}{16} \end{cases}.$$

5) $(x+y)^2+6+x\mathrm{i}=5(x+y)+(y+1)\mathrm{i}$.
Получаем

$$\begin{cases} (x+y)^2+6=5(x+y) \\ x=y+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x+y)^2-5(x+y)+6=0 \\ x=y+1 \end{cases}.$$

Далее,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=3 \end{array}\right. ; \\ x=y+1 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ x=y+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3 \\ x=y+1 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+1+y=2 \\ x=y+1 \end{cases} \\ \begin{cases} y+1+y=3 \\ x=y+1 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ x=1\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \end{array}\right..$$

2. Выполните действия:

1) $\dfrac{4-5i}{2+3i}=$
$$=\frac{(4-5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{8-10i-12i+15i^2}{4-9i^2}=$$
$$=\frac{-7-22i}{13}=-\frac{7}{13}-\frac{22}{13}i\,.$$

2) $\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}i\right)\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}i\right)+2i-1=$
$$=\frac{2}{9}-\frac{1}{9}i+\frac{8}{9}i-\frac{4}{9}i^2+2i-1=-\frac{1}{3}+2\frac{7}{9}i\,.$$

3) $\dfrac{2-3i}{(4-i)(2+2i)}=$
$$=\frac{2-3i}{8-2i+8i-2i^2}=\frac{2-3i}{10+6i}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{(2-3i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{10-15i-6i+9i^2}{25-9i^2}=\frac{1-21i}{2(25+9)}=$$
$$=\frac{1-21i}{68}=\frac{1}{68}-\frac{21}{68}i\,.$$

4) $\dfrac{(2+3i)(2-i)}{(3-2i)(1+i)}=$
$$=\frac{4+6i-2i-3i^2}{3-2i+3i-2i^2}=\frac{7+4i}{5+i}\cdot\frac{5-i}{5-i}=$$
$$=\frac{35+20i-7i-4i^2}{25-i^2}=\frac{39+13i}{26}=\frac{39}{26}+\frac{13}{26}i=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\,.$$

5) $\dfrac{1+3i}{i+2}+\dfrac{4i-1}{3i+1}=$
$$=\frac{(1+3i)^2+(4i-1)(i+2)}{(i+2)(3i+1)}=$$
$$=\frac{9i^2+6i+1+4i^2-i+8i-2}{3i^2+6i+i+2}=\frac{-14+13i}{-1+7i}\cdot\frac{-1-7i}{-1-7i}=$$
$$=\frac{14-13i+98i-91i^2}{(-1)^2-49i^2}=\frac{105+85i}{50}=\frac{21}{10}+\frac{17}{10}i\,.$$

Решение тренировочной работы 2

Вариант I.

1. Выполните действия:

1) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$.
Так как $i^2=-1$, и $i^{4k}=1$ для любого $k\in\mathbb{Z}$, то мы получаем

$$\begin{aligned}
&i^6=i^4i^2=i^2=-1;\\
&i^{20}=(i^4)^5=1;\\
&i^{30}=i^{28}i^2=-1;\\
&i^{36}=(i^4)^9=1^9=1;\\
&i^{54}=i^{52+2}=(i^4)^{13}i^2=-1.
\end{aligned}$$

Поэтому $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}=-1+1-1+1-1=-1$.

2) $(i+i^{11}+i^{21})(i^{31}+i^{41}+i^{51})=$
$=(i+i^{12}\cdot i^{-1}+i^{20}\cdot i)\cdot(i^{32}\cdot i^{-1}+i^{40}\cdot i+i^{52}\cdot i^{-1})=$
$=(i-i+i)(-i+i-i)=i(-i)=-i^2=1$. ($\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$.)

3) $$\frac{-\sqrt3+i\sqrt6}{-1+i\sqrt3}=\frac{(-\sqrt3+i\sqrt6)(-1-i\sqrt3)}{(-1)^2-i^2\cdot3}=$$
$$=\frac{\sqrt3-i\sqrt6+3i-i^2\cdot3\sqrt2}{1+3}=$$
$$=\frac{(\sqrt3+3\sqrt2)+(3-\sqrt6)i}{4}=\frac{\sqrt3+3\sqrt2}{4}+\frac{3-\sqrt6}{4}i\,.$$

2. Найдите x и y из системы уравнений:

$$\begin{cases} ix-2y=-i\\ (1+i)x-2iy=3+i\end{cases};\quad \begin{cases}\boxed{1}\cdot i\\ \boxed{2}\end{cases};$$
$$\begin{cases} i^2x-2yi=-i^2\\ (1+i)x-2iy=3+i\end{cases};\quad \begin{cases} -x-2yi=1\\ (1+i)x-2iy=3+i\end{cases};$$
$$\begin{cases}\boxed{1}\\ \boxed{2}-\boxed{1}\end{cases};\quad \begin{cases} -x-2yi=1\\ (2+i)x=2+i\end{cases};$$
$$\begin{cases} -x-2yi=1\\ x=1\end{cases};\quad \begin{cases} yi=-1\\ x=1\end{cases};\quad \begin{cases} y=i\\ x=1\end{cases}.$$

3. Вычислите:

1) $$\frac{-\left((-3i)(2-4i)-(2+4i)3i\right)^2}{(1-i)(1+i)^2-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i-\frac{1+2i}{1-2i}\right)-4i}=$$

$$=\frac{-(12i^2-6i-6i-12i^2)^2}{(1-i)(1+2i+i^2)-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i-\frac{(1+2i)^2}{1-4i^2}\right)-4i}=$$

$$=\frac{-12^2i^2}{2i-2i^2-\frac{2-i-1-4i-4i^2}{1+4}-4i}=$$

$$=\frac{144}{2i+2-\frac{5-5i}{5}-4i}=\frac{144}{1-i}=\frac{144(1+i)}{1^2-i^2}=$$

$$=\frac{144+144i}{2}=72+72i.$$

2) $$\frac{\left|\frac{|5-i|^2}{5-i}-i+(5+i)i^{125}-(2+3i)\right|}{\left|\left(\frac{|3+4i|^2}{3-4i}-4i\right)(i-4)+10-5i\right|}=$$

$$=\frac{\left|\left(\frac{26}{5-i}-i\right)+(5+i)i-2-3i\right|}{\left|\left(\frac{25}{3-4i}-4i\right)(i-4)+10-5i\right|}=$$

$$=\frac{\left|\frac{26}{26}(5+i)-i+i^2+5i-2-3i\right|}{\left|\left(\frac{25}{25}(3+4i)-4i\right)(i-4)+10-5i\right|}=$$

$$=\frac{|5+i-i-1+2i-2|}{|(3+4i-4i)(i-4)+10-5i|}=$$

$$=\frac{|2(1+i)|}{|3i-12+10-5i|}=\frac{2|1+i|}{|-2-2i|}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=1.$$

3) $(1+i)^6=$

$$((1+i)^2)^3=(1+2i+i^2)^3=(2i)^3=-8i \quad (i^3=-i).$$

4) $$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=$$

$$=\frac{(-1)^3+3(-1)^2i\sqrt{3}-3i^2\cdot 3+i^3\cdot 3\sqrt{3}}{8}=$$

$$=\frac{-1+3\sqrt{3}i+9-3\sqrt{3}i}{8}=\frac{8}{8}=1.$$

5) $\left(\frac{2+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{2+\mathrm{i}\sqrt{2}}\right)^{4}=\left(\frac{2(2-\mathrm{i}\sqrt{2})}{4-2\mathrm{i}^2}\right)^{4}=\left(\frac{2-\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}\right)^{4}=$

$$\boxed{(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$$

$$=\frac{2^4-4\cdot 2^3\cdot \mathrm{i}\sqrt{2}+6\cdot 2^2\cdot \mathrm{i}^2\cdot 2-4\cdot 2\mathrm{i}^3\cdot 2\sqrt{2}+\mathrm{i}^4\cdot 4}{81}=$$

$$=\frac{1}{81}(20-48-32\sqrt{2}\mathrm{i}+16\sqrt{2}\mathrm{i})=$$

$$=\frac{1}{81}(-28-16\sqrt{2}\mathrm{i})=-\frac{28}{81}-\frac{16}{81}\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Можно действовать иначе:

$$\left(\frac{2+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{-4}=\left(\left(\frac{2+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\right)^{-2}=\left(\frac{4+4\mathrm{i}\sqrt{2}+2\mathrm{i}^2}{4}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{1+2\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{1+4\mathrm{i}\sqrt{2}+\mathrm{i}^2\cdot 8}{4}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{-7+4\sqrt{2}\mathrm{i}}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{-7+4\sqrt{2}\mathrm{i}}=\frac{4(-7-4\sqrt{2}\mathrm{i})}{49-32\mathrm{i}^2}=$$

$$=\frac{-28-16\sqrt{2}\mathrm{i}}{81}=-\frac{28}{81}-\frac{16}{81}\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

6) $\left(\frac{\mathrm{i}^5+2}{\mathrm{i}^7-1}\right)^{2}=\left(\frac{\mathrm{i}+2}{-\mathrm{i}-1}\right)^{2}=\left(\frac{(\mathrm{i}+2)(-\mathrm{i}+1)}{\mathrm{i}^2-1}\right)^{2}=$

$$=\left(\frac{-\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}+\mathrm{i}+2}{-2}\right)^{2}=\left(\frac{3-\mathrm{i}}{-2}\right)^{2}=$$

$$=\frac{9-6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{4}=\frac{8-6\mathrm{i}}{4}=2-\frac{3}{2}\mathrm{i}.$$

4. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

1) $3=3(1+0\cdot\mathrm{i})=3(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$.

2) $-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}=\sqrt{4+12}\left(-\frac{2}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)=$

$$=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

т. к. $\begin{cases}\cos\varphi=-\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\ \varphi=\frac{2\pi}{3}.$

3) $2\mathrm{i}=2(0+\mathrm{i})=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$,

т. к. $\begin{cases}\cos\varphi=0\\ \sin\varphi=1\end{cases}\Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{2}.$

4) $$\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{1^2-(-1)}=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

так как $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$ и $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$, а значит, $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

5) $$1+\cos\frac{8\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{7}=2\cos^2\frac{4\pi}{7}+2\mathrm{i}\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}=$$

$$=2\cos\frac{4\pi}{7}\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{7}\right).$$

Однако $\cos\frac{4\pi}{7}<0$, значит, последнее выражение не является тригонометрической формой комплексного числа.

Представим данное число несколько иначе. Для этого воспользуемся формулами

$$-\cos\frac{4\pi}{7}=\cos\left(\pi+\frac{4\pi}{7}\right),$$
$$-\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\left(\pi+\frac{4\pi}{7}\right);$$

получим

$$1+\cos\frac{8\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{7}=-2\cos\frac{4\pi}{7}\left(-\cos\frac{4\pi}{7}-\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{7}\right)=$$

$$=-2\cos\frac{4\pi}{7}\left(\cos\left(\pi+\frac{4\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{4\pi}{7}\right)\right)=$$
$$=-2\cos\frac{4\pi}{7}\left(\cos\frac{11\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{7}\right),$$

так как $-2\cos\frac{4\pi}{7}>0$, то это выражение представляет собой тригонометрическую форму комплексного числа.

Вариант II.

1. Выполните действия:

1) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = i - 1 - i + 1 + i = i$.

2) $(i^3 + i^{13} + i^{23})(i^5 + i^{15} + i^{25}) = (-i + i - i)(i - i + i) =$

$$= -i(i) = -i^2 = -(-1) = 1,$$

поскольку $i^3 = i \cdot i^2 = -i$; $i^{13} = i^{12} \cdot i = i$; $i^{23} = i^{24} i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$; $i^5 = i^4 i = i$; $i^{15} = i^{16} i^{-1} = 1 \cdot (-i) = -i$; $i^{25} = i^{24} \cdot i = i$.

3) $$\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)}{3 - i^2} = \frac{3\sqrt{2} - 3i + \sqrt{6}i - i^2\sqrt{3}}{3 + 1} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - \sqrt{3})i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6} + 1) + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{4} i.$$

2. Найдите x и y из системы уравнений

$$\begin{cases} (1 - i)x - 0{,}5(1 + i)y = 0{,}5(-1 + i) \\ (-2 + 2i)x - 2y = -4 \end{cases}; \quad \begin{cases} \boxed{1} \cdot 2 \\ \boxed{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} (2 - 2i)x - (1 + i)y = -1 + i \\ (-2 + 2i)x - 2y = -4 \end{cases}; \quad \begin{cases} \boxed{1} + \boxed{2} \cdot 2 \\ \boxed{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} -(3 + i)y = -5 + i \\ (-2 + 2i)x - 2y = -4 \end{cases}.$$

Из первого уравнения получаем

$$y = \frac{5 - i}{3 + i} = \frac{(5 - i)(3 - i)}{9 - i^2} = \frac{15 - 3i - 5i + i^2}{10} = \frac{14 - 8i}{10} = \frac{7 - 4i}{5}.$$

Из второго уравнения, $(-1 + i)x = y - 2$, т. е. $(-1 + i)x = \frac{7 - 4i}{5} - 2$. Далее, $\frac{7 - 4i}{5} - 2 = \frac{7 - 4i - 10}{5} = -\frac{3 + 4i}{5}$; $(-1 + i)x = -\frac{3 + 4i}{5}$;

$$x = \frac{3 + 4i}{5(1 - i)} = \frac{(3 + 4i)(1 + i)}{5(1 - i^2)} = \frac{3 + 4i + 3i + 4i^2}{5 \cdot 2} =$$

$$= \frac{-1 + 7i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10} i.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10} i \\ y = \frac{7 - 4i}{5} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -0{,}1 + 0{,}7i \\ y = 1{,}4 - 0{,}8i \end{cases}.$$

3. Вычислите:

1) $$\frac{(3i(2+4i)+(2-4i)(-3i))^2}{(1+i)(1-i)^2-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i+\frac{1-2i}{1+2i}\right)+4i}=$$

$$=\frac{(6i+12i^2-6i+12i^2)^2}{(1+i)(1-2i+i^2)-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i+\frac{(1-2i)(1-2i)}{1-4i^2}\right)+4i}=$$

$$=\frac{(-24)^2}{-2i-2i^2-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i+\frac{1-4i+4i^2}{5}\right)+4i}=$$

$$=\frac{576}{-2i+2-\left(\frac{2+i-3-4i}{5}\right)+4i}=\frac{576}{2i+2-\frac{-1-3i}{5}}=$$

$$=\frac{576}{2i+\frac{3}{5}i+2\frac{1}{5}}=\frac{576}{2{,}6i+2{,}2}=\frac{576(2{,}6i-2{,}2)}{(2{,}6i)^2-(2{,}2)^2}=$$

$$=\frac{576(26i-22)\cdot 10}{-26^2-22^2}=\frac{576\cdot 2(13i-11)\cdot 10}{-1160}=$$

$$=\frac{288}{29}(13i-11)=\frac{3168}{29}-\frac{3744}{29}i.$$

2) $$\frac{\left|\frac{|5+i|^2}{5+i}+i-(5-i)i^{125}-(2-3i)\right|}{\left|\left(\frac{|3-4i|^2}{3+4i}+4i\right)(i+4)-10-5i\right|}=$$

$$=\frac{\left|\frac{26}{26}(5-i)+i-(5-i)i-2+3i\right|}{\left|\left(\frac{25}{25}(3-4i)+4i\right)(i+4)-10-5i\right|}=$$

$$=\frac{\left|5-i+i+i^2-5i-2+3i\right|}{\left|(3-4i+4i)(i+4)-10-5i\right|}=$$

$$=\frac{|2-2i|}{|3i+12-10-5i|}=\frac{|2-2i|}{|2-2i|}=1.$$

3) $(1-i)^6=((1-i)^2)^3=(1-2i+i^2)^3=(-2i)^3=-8i^3=8i\,.$

4) $$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4(1+i)^4=\frac{1}{4}(1+4i+6i^2+4i^3+i^4)=$$

$$=\frac{1}{4}(1+4i-6-4i+1)=\frac{1}{4}(-4)=-1.$$

5) $$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4=\left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^4=\left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^4=\frac{(-2i)^4}{2^4}=i^4=1\,.$$

6) $$\left(\frac{4+\mathrm{i}^7}{3-\mathrm{i}^5}\right)^2=\left(\frac{4-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\right)^2=\left(\frac{(4-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{12-3\mathrm{i}+4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{9+1}\right)^2=\left(\frac{13+\mathrm{i}}{10}\right)^2=$$
$$=\frac{169+26\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{100}=\frac{168}{100}+\frac{26\mathrm{i}}{100}=1{,}68+0{,}26\mathrm{i}.$$

4. Представьте комплексное число в тригонометрической форме

1) $6\mathrm{i}=6(0+\mathrm{i})=6\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right).$

2) $-\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right),$

т. к. $|-\sqrt{3}-\mathrm{i}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ и $\begin{cases}\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\ \varphi=\frac{7\pi}{6}.$

3) $4=4(1+0)=4(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0).$

4) $$\frac{1}{2\mathrm{i}+2}=\frac{1}{2}\frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1}{2}\frac{1-\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right),$$

поскольку $|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; и $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow\ \varphi=\frac{7\pi}{4}.$

5) $$1+\cos\frac{6\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{5}=2\cos^2\frac{3\pi}{5}+2\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}=$$
$$=2\cos\frac{3\pi}{5}\left(\cos\frac{3\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{5}\right).$$

Однако $\cos\frac{3\pi}{5}<0$, и значит, это не тригонометрический вид комплексного числа. Представим его несколько иначе, пользуясь тем, что $-\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{5}\right)$, $-\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{5}\right)$:

$$1+\cos\frac{6\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{5}=-2\cos\frac{3\pi}{5}\left(-\cos\frac{3\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{5}\right)=$$
$$=-2\cos\frac{3\pi}{5}\left(\cos\frac{8\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{5}\right).$$

Так как $-2\cos\frac{3\pi}{5}>0$, то это тригонометрическая форма комплексного числа.

Решение тренировочной работы 3

Вариант I.

Выполните действия:

1) $$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) =$$
$$= 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right)\right) =$$
$$= 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3(\sqrt{2} + i\sqrt{2}).$$

2) $$\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right) : \left(\cos\frac{3\pi}{20} + i\sin\frac{3\pi}{20}\right) =$$
$$= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{3\pi}{20}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{3\pi}{20}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

3) $$\frac{\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}} = \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{5\pi}{8}\right) =$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

4) $$(\sqrt{3} + i)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) =$$
$$\left[\ \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\ \right]$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) =$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right)\right) =$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

5) $$\frac{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}{1 + i} =$$
$$\left[\ 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\ \right]$$
$$= \frac{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i.$$

6) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^4}=$

$$\left[\begin{array}{l} 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\Big)=\sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)\\ 1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\Big)=\sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{4}\Big) \end{array}\right]$$

$$=\frac{\Big(\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big)\Big)^5}{\Big(\sqrt{2}\Big(\cos(-\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\Big)\Big)^4}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}\Big(\cos(5\cdot\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(5\cdot\frac{\pi}{4})\Big)}{4\Big(\cos(4\cdot\frac{7\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(4\cdot\frac{7\pi}{4})\Big)}=\frac{\sqrt{2}\Big(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\Big)}{\Big(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi\Big)}=$$

$$=\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big)=\sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)=1+\mathrm{i}.$$

7) $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^6=$

$$\left[\ 1-\mathrm{i}\sqrt{3}=2\Big(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)=2\Big(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\Big)\ \right]$$

$$=\Big(2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big)\Big)^6=$$

$$=2^6\Big(\cos\Big(6\cdot\frac{5\pi}{3}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(6\cdot\frac{5\pi}{3}\Big)\Big)=64(\cos 10\pi+\mathrm{i}\sin 10\pi)=64.$$

8) $\Big(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)^{10}=$

$$\left[\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}=1\cdot\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\Big)=\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\ \right]$$

$$=(\sqrt{3})^{10}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\Big)^{10}=3^5\Big(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\Big)^{10}=$$

$$=3^5\Big(\cos\Big(10\cdot\frac{11\pi}{6}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(10\cdot\frac{11\pi}{6}\Big)\Big)=3^5\Big(\cos\frac{55\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{55\pi}{3}\Big)=$$

$$=3^5\Big(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big)=243\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big).$$

9) $(1+\mathrm{i})^8(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^6=$

$$\left[\begin{array}{l} 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\Big)=\sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)\\ 1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\Big(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)=2\Big(\cos\dfrac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}\Big) \end{array}\right]$$

$$=\Big(\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big)\Big)^8\Big(2\Big(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\Big)\Big)^6=$$

$$=2^4(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi)(2^6(\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi))=2^4\cdot 2^6=2^{10}=1024.$$

10) $\left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}+\left(\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=\quad [n\in\mathbb{N}]$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\\ \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=1\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\end{array}\right]$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{3n}+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{3n}=$$

$$=(\cos 2\pi n+\mathrm{i}\sin 2\pi n)+(\cos 4\pi n+\mathrm{i}\sin 4\pi n)=1+1=2.$$

Вариант II.

Выполните действия:

1) $$10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right):\left(5\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\mathrm{i}.$$

2) $$\left(\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{15}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{15}\right)=$$

$$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)\right)=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

3) $$\frac{\cos\frac{7\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$=\cos\left(\frac{7\pi}{10}-\frac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{10}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i}.$$

4) $$(1+\mathrm{i})\left(\cos\frac{3\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=(1+\mathrm{i})\left(\cos(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)\Big)=$$

$$=(1+\mathrm{i})\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=(1+\mathrm{i})\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}.$$

5) $$\frac{\mathrm{i}}{\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1\cdot(0+\mathrm{i})}{\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

6) $$\frac{(1-\mathrm{i})^5}{(1+\mathrm{i})^3}=$$

$$\left[\begin{array}{l}1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\\ 1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^5}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^3}=\frac{4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=2.$$

7) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6 =$

$$\left[\ \sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\Big) = 2\Big(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\Big)\ \right]$$

$$= \Big(2\Big(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\Big)\Big)^6 = 2^6(\cos(-\pi)+\mathrm{i}\sin(-\pi)) = -64.$$

8) $\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\Big)^8 =$

$$\left[\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = 1\cdot\Big(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big)\ \right]$$

$$= (\sqrt{3})^8\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)^8 = 3^4\Big(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big)^8 =$$

$$= 3^4\Big(\cos\frac{8\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{3}\Big) = 81\Big(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\Big) = 81\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big).$$

9) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^8(1-\mathrm{i})^6 =$

$$\left[\begin{array}{l} 1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big) = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big) \\ 1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\Big) \end{array}\right]$$

$$= \Big(2\Big(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big)\Big)^8\Big(\sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\Big)\Big)^6 =$$

$$= 2^8\Big(\cos\frac{8\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{3}\Big)2^3\Big(\cos\frac{21\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{21\pi}{2}\Big) =$$

$$= 2^{11}\Big(\cos\Big(\frac{8\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(\frac{8\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\Big)\Big) =$$

$$= 2^{11}\Big(\cos\frac{19\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{6}\Big) = 2^{11}\Big(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\Big) =$$

$$= 2^{11}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\Big) = -1024(\sqrt{3}+\mathrm{i}).$$

10) $\Big(\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\Big)^{2n}+\Big(\frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\Big)^{2n} =$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4} \end{array}\right]$$

$$= \Big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big)^{2n}+\Big(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\Big)^{2n} =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2}n + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}n\right) + \left(\cos\left(\frac{7\pi}{2}n\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{2}n\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 + \mathrm{i} + 0 - \mathrm{i} & \text{при} \quad n = 4k + 1; \\ -1 + 0 - 1 + 0 & \text{при} \quad n = 4k + 2; \\ 0 - \mathrm{i} + 0 + \mathrm{i} & \text{при} \quad n = 4k + 3; \\ 1 + 0 + 1 + 0 & \text{при} \quad n = 4k; \end{cases} \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, $\left(\dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{2n} + \left(\dfrac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)^{2n} =$

$$= \left[\begin{array}{lll} 0 & \text{при} & n = 4k + 1; \\ -2 & \text{при} & n = 4k + 2; \\ 0 & \text{при} & n = 4k + 3; \\ 2 & \text{при} & n = 4k, \end{array} \right. \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Решение тренировочной работы 4

Вариант I.

1. Выполните действия с комплексными числами, представив их в тригонометрической форме.

1) $$5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) : \left(2{,}5\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right) =$$
$$= \frac{5}{2{,}5}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12}\right)\right) =$$
$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

2) $$6\left(\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 0{,}5\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как $-\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{11\pi}{6}$ и $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{11\pi}{6}$, то выражение

$$\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}$$

является тригонометрической формой комплексного числа. Следовательно,

$$6\left(\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 0{,}5\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= 6\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right) \cdot 0{,}5\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= 3\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

2. Вычислите: $\sqrt[4]{-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}}$.
Имеем:

$$\left|-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4;$$

$$-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

значит,

$$\sqrt[4]{-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}} = \sqrt[4]{4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)} =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right).$$

Для $k=0,1,2,3$ получаем:

$$k=0;\quad z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i};$$

$$k=1;\quad z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i};$$

$$k=2;\quad z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=$$
$$=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i};$$

$$k=3;\quad z_4=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}; -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}; -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}; \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

3. Решите уравнения:

1) $z^2+4z+5=0$.

По формуле четного коэффициента

$$z_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-5}=-2\pm\sqrt{-1},$$

но $\sqrt{-1}=\pm\,\mathrm{i}$, тогда $z_{1,2}=-2\pm\mathrm{i}$.

2) $x^3-2x+4=0$.

Пусть $f(x)=x^3-2x+4$, где делители $d=\pm 1; \pm 2; \pm 4$.

$f(-2)=-8+4+4=0$, значит, $f(x)\,\vdots\,(x+2)$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+0x^2-2x+4 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2} & x^2-2x+2 \\
\quad -2x^2-2x & \\
\quad \underline{-2x^2-4x} & \\
\qquad\qquad 2x+4 & \\
\qquad\qquad \underline{2x+4} &
\end{array}$$

Далее, $x^2-2x+2=0$; $x_{1,2}=1\pm\sqrt{-1}=1\pm\mathrm{i}$. $(\sqrt{-1}=\pm\,\mathrm{i})$

Значит, все корни уравнения найдены.

Ответ: $\{-2; 1-\mathrm{i}; 1+\mathrm{i}\}$ — корни уравнения $x^3-2x+4=0$.

3) $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$.

Свободный член имеет делители $d = \pm 1; \pm 2$. Проверяя, убеждаемся, что целых корней нет. Если же корни рациональные, то еще необходимо проверить $d = \pm \frac{1}{2}$. Имеем:

$$2 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + 3 - 2 = 0,$$

значит, $x = \frac{1}{2}$ — корень:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x^2+6x-4 & 2x-1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3-1x^2} & x^2-2x+2 \\ \quad -4x^2+6x & \\ \quad \underline{-4x^2+2x} & \\ \qquad\quad 4x-2 & \\ \qquad\quad \underline{4x-2} & \end{array}$$

Далее,

$$x^2 - 2x + 2 = 0; \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm \mathrm{i} \quad (\sqrt{-1} = \pm\,\mathrm{i}).$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; 1 - \mathrm{i}; 1 + \mathrm{i}\right\}$.

4) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Пусть $x^3 = t$, тогда имеем $t^2 - 9t + 8 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 8, \\ t = 1. \end{array}\right.$

а) Пусть $x^3 = 8$, тогда имеем:

$$x = \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{1} = 2\sqrt[3]{(1 + 0 \cdot \mathrm{i})} = 2\sqrt[3]{1 \cdot (\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)} =$$
$$= 2\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{0 + 2\pi k}{3}\right).$$

При $k = 1; 2; 3$ получаем

$$k = 1, \quad x_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) =$$
$$= -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}.$$

$$k = 2, \quad x_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) =$$
$$= -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}.$$

$$k = 3, \quad x_3 = 2(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = 2(1 + 0 \cdot \mathrm{i}) = 2.$$

б) Пусть $x^3 = 1$. Получим:

$$x = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{(1 + 0 \cdot \mathrm{i})} = \sqrt[3]{\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{3}.$$

Аналогично находим

$$x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; \quad x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; \quad x_6 = 1.$$

Ответ: $\left\{1; 2; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}; -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}; -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\right\}$.

5) $6x^4 - 19x^3 + 25x^2 - 19x + 6 = 0$.
Это возвратное уравнение, поделим его на x^2:

$$6x^2 - 19x + 25 - \frac{19}{x} + \frac{6}{x^2} = 0;$$
$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 19\left(x + \frac{1}{x}\right) + 25 = 0.$$

Обозначим $x + \frac{1}{x} = t$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, тогда

$$6(t^2 - 2) - 19t + 25 = 0; \quad 6t^2 - 19t + 13 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 312}}{12} = \frac{19 \pm 7}{12}; \quad \left[\begin{array}{l} t = \frac{13}{6}, \\ t = 1. \end{array}\right.$$

а) $t = \frac{13}{6}$; $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$; $6x^2 - 13x + 6 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}; \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

б) $t = 1$; $x + \frac{1}{x} = 1$; $x^2 - x + 1 = 0$;

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}. \quad (\sqrt{-1} = \pm\, \mathrm{i})$$

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right\}$.

6) $f(x) = 0$, где $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 10x - 8$.
Известно, что $f(1 + \mathrm{i}) = 0$. Найдите остальные корни.

Как мы уже знаем, если уравнение с целыми коэффициентами имеет комплексный корень x, то $\overline{x}$ также есть корень такого уравнения. Пусть $x_1 = 1 + \mathrm{i}$, тогда $\overline{x}_1 = 1 - \mathrm{i}$. По этим корням, используя теорему, обратную теореме Виета, составим квадратное уравнение, корнями которого они являются:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + \mathrm{i} + 1 - \mathrm{i} = 2, & (p = -2) \\ x_1 x_2 = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 1 - (\mathrm{i})^2 = 1 - (-1) = 2; & (q = 2) \end{cases}$$

т. е. $x^2 - 2x + 2 = 0$, тогда

$$\begin{array}{l|l} 3x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 10x - 8 & x^2 - 2x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{3x^4 - 6x^3 + 6x^2} & 3x^2 + x - 4 \\ \qquad x^3 - 6x^2 + 10x & \\ \qquad \underline{x^3 - 2x^2 + 2x} & \\ \qquad\quad -4x^2 + 8x - 8 & \\ \qquad\quad \underline{-4x^2 + 8x - 8} & \end{array}$$

Далее,

$$3x^2 + x - 4 = 0;$$

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6};$$

$$x_3 = 1; \quad x_4 = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{4}{3}; 1; 1 - \mathrm{i}; 1 + \mathrm{i}\right\}$.

7) $z^2 = 3 + 4\mathrm{i}$ (решить двумя способами).

Так как $|3 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, то $3 + 4\mathrm{i} = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right)$;

$\begin{cases} \cos\varphi_0 = \frac{3}{5} \\ \sin\varphi_0 = \frac{4}{5} \end{cases}$, значит, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{4}{3}$, $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Далее,

$$3 + 4\mathrm{i} = 5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right);$$

$$z = \sqrt{3 + 4\mathrm{i}} = \sqrt{5\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)} =$$

$$= \sqrt{5}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi k}{2}\right).$$

При $k=0$ получаем

$z_0=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$. Далее, находим

$$\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{3}{5};$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда $z_0=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=2+\mathrm{i}$.

При $k=1$ имеем

$$z_1=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi\right)\right)=$$
$$=\sqrt{5}\left(-\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)=$$
$$=-\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right).$$

Учитывая предыдущие результаты, получим

$$z_1=-\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)=-z_0=-2-\mathrm{i}.$$

Итак, $z_0=2+\mathrm{i}$; $z_1=-2-\mathrm{i}$. Проверка дает $(2+\mathrm{i})^2=3+4\mathrm{i}$; $(-(2+\mathrm{i}))^2=3+4\mathrm{i}$, значит, корни найдены верно. Но нет ли в данном случае способа более простого?

Попробуем решить иначе. Пусть $z=x+y\mathrm{i}$; $x,y\in\mathbb{R}$, тогда $z^2=x^2+2xyi+y^2\mathrm{i}^2$; $z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$, и уравнение имеет вид $x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=3+4\mathrm{i}$. Приравнивая коэффициенты при действительной и мнимой части числа, получим:

$$\begin{cases}x^2-y^2=3\\2xy=4\end{cases};\quad\begin{cases}x^2-\dfrac{4}{x^2}=3\\y=\dfrac{2}{x}\end{cases};\quad\begin{cases}x^4-3x^2-4=0\\y=\dfrac{2}{x}\end{cases};$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=4\\x^2=-1,\quad x\notin\mathbb{R},\end{array}\right.\\y=\dfrac{2}{x}\end{cases};\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.,\quad\text{т.е.}\quad\left[\begin{array}{l}z=2+\mathrm{i}\\z=-2-\mathrm{i}\end{array}\right..$$

Ответ: $z_0=2+\mathrm{i}$; $z_1=-2-\mathrm{i}$ — корни уравнения $z^2=3+4\mathrm{i}$.

8) $z^2-(5-\mathrm{i})z+6=0$ (решить двумя способами).

$$z=\frac{5-\mathrm{i}\pm\sqrt{(5-\mathrm{i})^2-24}}{2}=\frac{5-\mathrm{i}\pm\sqrt{25-10\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-24}}{2}=$$
$$=\frac{5-\mathrm{i}\pm\sqrt{-10\mathrm{i}}}{2}=\frac{5-\mathrm{i}\pm\sqrt{10}\sqrt{-\mathrm{i}}}{2}.$$

Воспользуемся теоремой Муавра:

$$\sqrt{-1}=\sqrt{0-\mathrm{i}}=\sqrt{\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}}=$$
$$=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{2}.$$

При $k=0$ имеем: $z_0'=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

При $k=1$ имеем: $z_1'=\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

$$z_1=\frac{5-\mathrm{i}+\sqrt{10}\cdot z_0'}{2}=\frac{5-\mathrm{i}-\sqrt{5}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i};$$
$$z_2=\frac{5-\mathrm{i}-\sqrt{10}\cdot z_0'}{2}=\frac{5-\mathrm{i}+\sqrt{5}-\sqrt{5}\mathrm{i}}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathrm{i};$$
$$z_3=\frac{5-\mathrm{i}+\sqrt{10}\cdot z_1'}{2}=\frac{5-\mathrm{i}+\sqrt{5}-\sqrt{5}\mathrm{i}}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathrm{i};$$
$$z_4=\frac{5-\mathrm{i}-\sqrt{10}\cdot z_1'}{2}=\frac{5-\mathrm{i}-\sqrt{5}+\sqrt{5}\mathrm{i}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i},$$

т. е. $z_1=z_4$ и $z_2=z_3$,
значит, $z_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{i}$ и $z_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\mathrm{i}$ — корни.
Возможен и другой способ.
Так как $z=x+y\mathrm{i}$; $x,y\in\mathbb{R}$, то уравнение примет вид

$$(x+y\mathrm{i})^2-(5-\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})+6=0.$$

Тогда $x^2+2xy\mathrm{i}+y^2\mathrm{i}^2-5x+x\mathrm{i}-5y\mathrm{i}+y\mathrm{i}^2+6=0$.
Группируя, получим $(x^2-y^2-5x-y+6)+(2xy+x-5y)\mathrm{i}=0$, значит,

$$\begin{cases}x^2-y^2-5x-y+6=0\\2xy=5y-x\end{cases}.$$

Так как $x^2-5x=(x-2{,}5)^2-2{,}5^2$; $y^2+y=(y+0{,}5)^2-0{,}5^2$, то, подставляя в первое уравнение, получим

$$\begin{aligned}(x^2-5x)-(y^2+y)+6&=\\ &=(x-2{,}5)^2-2{,}5^2-(y+0{,}5)^2+0{,}5^2+6=\\ &=(x-2{,}5)^2-(y+0{,}5)^2=0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l}x-2{,}5=y+0{,}5\\ x-2{,}5=-y-0{,}5\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=y+3\\ x=2-y\end{array}\right..$$

а) $\begin{cases}x=y+3\\ 2xy=5y-x\end{cases};\quad \begin{cases}x=y+3\\ 2(y+3)y=5y-y-3\end{cases};$

$$\begin{cases}x=y+3\\ 2y^2+2y+3=0\quad (D<0)\end{cases}.$$

Корней нет, так как $y\in\mathbb{R}$.

б) $\begin{cases}x=2-y\\ 2xy=5y-x\end{cases};\quad \begin{cases}x=2-y\\ 2(2-y)=5y-2+y\end{cases};$

$$\begin{cases}x=2-y\\ 2y^2+2y-2=0\end{cases};\quad \begin{cases}x=2-y\\ \left[\begin{array}{l}y=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}\\ y=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}\end{array}\right.\end{cases}.$$

$$y_1=\frac{-1+\sqrt5}{2};\quad x_1=2-\frac{-1+\sqrt5}{2}=\frac{5-\sqrt5}{2};$$

$$z_1=\frac{5-\sqrt5}{2}+\frac{\sqrt5-1}{2}\mathrm{i};$$

$$y_2=\frac{-1-\sqrt5}{2};\quad x_2=2+\frac{1+\sqrt5}{2}=\frac{5+\sqrt5}{2};$$

$$z_2=\frac{5+\sqrt5}{2}-\frac{\sqrt5+1}{2}\mathrm{i}.$$

Получили те же корни.

В данном случае выбор способа решения — дело вкуса.

Ответ: $z_1=\frac{5-\sqrt5}{2}+\frac{\sqrt5-1}{2}\mathrm{i}$; $z_2=\frac{5+\sqrt5}{2}-\frac{\sqrt5+1}{2}\mathrm{i}$ — корни уравнения $z^2-(5-\mathrm{i})z+6=0$.

Вариант II.

1. Выполните действия с комплексными числами, представив их в тригонометрической форме.

1) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 1{,}5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Второй множитель уже представлен в тригонометрической форме; для первого множителя имеем:

$$\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}.$$

Теперь это тригонометрическая форма числа. Тогда

$$4\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 1{,}5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= 6\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

2) $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) : \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$$= 8 \cdot \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 12\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

2. Вычислите: $\sqrt[4]{2 - 2i\sqrt{3}}$.

$$|2 - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4;$$

$$2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right), \text{ значит,}$$

$$\sqrt[4]{-2 + 2i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)} =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi + 6\pi k}{12} + i\sin\frac{5\pi + 6\pi k}{12}\right);$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{5\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

Аналогично, $\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

При $k=0,1,2,3$ получаем

$$k=0;\qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i};$$

$$k=1;\qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i};$$

$$k=2;\qquad z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i};$$

$$k=3;\qquad z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{23\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}.$$

Ответ:

$$\left\{\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}; -\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}; -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}; \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}\right\}.$$

3. Решите уравнения:

1) $z^2 - 3z + 3 = 0$.

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2},$$

т. е. $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$; $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

2) $x^3 - x + 6 = 0$.

$f(x) = x^3 - x + 6$, где делители $d = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

$f(-2) = -8 + 2 + 6 = 0$, тогда $f(x) \,\vdots\, (x+2)$.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 0x^2 - x + 6 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + 2x^2} & x^2 - 2x + 3 \\
\quad -2x^2 - x & \\
\quad \underline{-2x^2 - 4x} & \\
\qquad\quad 3x + 6 & \\
\qquad\quad \underline{3x + 6} &
\end{array}$$

Далее, $x^2 - 2x + 3 = 0$;

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm \sqrt{2}\sqrt{-1} = 1 \pm \sqrt{2}\mathrm{i}. \quad (\sqrt{-1} = \pm\,\mathrm{i})$$

Ответ: $\{-2; 1-\sqrt{2}\mathrm{i}; 1+\sqrt{2}\mathrm{i}\}$.

3) $2x^3+5x^2+6x+2=0$.
Свободный член имеет делители $d=\pm 1; \pm 2$. Проверяя, убеждаемся, что целых корней нет. Если же корни рациональные, то еще необходимо проверить $d=\pm\ \frac{1}{2}$.
Пусть

$$f(x)=2x^3+5x^2+6x+2.$$

При $x=\frac{1}{2}$ имеем:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{8}\right)+5\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}-3+2=0,$$

значит, $f(x)\ \vdots\ (2x+1)$:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+5x^2+6x+2 & 2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3+\ x^2} & x^2+2x+2 \\
\qquad 4x^2+6x & \\
\qquad \underline{4x^2+2x} & \\
\qquad\qquad 4x+2 & \\
\qquad\qquad \underline{4x+2} &
\end{array}$$

Далее, $x^2+2x+2=0$;

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{-1}=-1\pm\mathrm{i}. \quad (\sqrt{-1}=\pm\,\mathrm{i})$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; -1-\mathrm{i}; -1+\mathrm{i}\right\}$.

4) $x^6+10x^3+9=0$.
Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x^3=-1 \\ x^3=-9 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{-1}=-\sqrt[3]{1} \\ x=\sqrt[3]{-9}=-\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{1} \end{array}\right.$$

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1\cdot(1+0\cdot\mathrm{i})}=\sqrt[3]{1\cdot(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)}=$$
$$=\cos\frac{0+2\pi k}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{0+2\pi k}{3}.$$

При $k=0;1;2$ получаем:

$$k=0, \quad z_0=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0=1;$$

$$k=1, \quad z_1=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};$$

$$k=2, \quad z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Таким образом,

$$x_1=-1;\qquad x_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i};$$
$$x_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i};\qquad x_4=-\sqrt[3]{9};$$
$$x_5=\frac{\sqrt[3]{9}}{2}-\frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i};\quad x_6=\frac{\sqrt[3]{9}}{2}+\frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$

Ответ:

$$\Big\{-\sqrt[3]{9};\ -1;\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i};\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i};$$
$$\frac{\sqrt[3]{9}}{2}-\frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i};\ \frac{\sqrt[3]{9}}{2}+\frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\Big\}.$$

5) $10x^4+39x^3+49x^2+39x+10=0$.
Это возвратное уравнение. Деля обе части уравнения на x^2, получим

$$10x^2+39x+49+\frac{39}{x}+\frac{10}{x^2}=0;$$
$$10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+39\left(x+\frac{1}{x}\right)+49=0.$$

Обозначим $x+\dfrac{1}{x}=t$; $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$, тогда

$$10(t^2-2)+39t+49=0;\quad 10t^2+39t+29=0;\quad \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\frac{29}{10} \end{array}\right..$$

Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) $t=-1$; $x+\dfrac{1}{x}=-1$; $x^2+x+1=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.\quad (\sqrt{-1}=\pm\,\mathrm{i})$$

б) $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{29}{10}$; $10x^2+29x+10=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-29\pm\sqrt{29^2-4\cdot10^2}}{20}=\frac{-29\pm21}{20};\quad \left[\begin{array}{l} x=-\frac{2}{5} \\ x=-\frac{5}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{2}{5};\ -2\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i};\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right\}$.

6) $f(x)=0$, где $f(x)=x^5-8x^4+22x^3-26x^2+21x-18$.
Известно, что $f(\mathrm{i})=0$. Найдите остальные корни.

Мы уже знаем, что если уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексный корень x, то число $\overline{x}$ также является корнем такого уравнения.

Примечание: для комплексного числа вида $z=a+b\mathrm{i}$ имеем $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$, в частности, при $a=0$ и $b=1$ получаем $\overline{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

Отсюда следует, что многочлен

$$(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})=x^2+1$$

является делителем многочлена $f(x)$. Произведем деление:

$$\begin{array}{r|l}
x^5-8x^4+22x^3-26x^2+21x-18 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5\qquad +\ x^3}\qquad\qquad\qquad\qquad & x^3-8x^2+21x-18 \\
-8x^4+21x^3-26x^2\qquad\qquad & \\
\underline{-8x^4\qquad -\ 8x^2}\qquad\qquad & \\
21x^3-18x^2+21x\qquad & \\
\underline{21x^3\qquad +21x}\qquad & \\
-18x^2\qquad -18 & \\
\underline{-18x^2\qquad -18} &
\end{array}$$

Обозначим теперь $\varphi(x)=x^3-8x^2+21x-18=0$.
Свободный член многочлена $\varphi(x)$ имеет делители $d=\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18$.
Проверяя, убеждаемся, что $\varphi(2)=8-32+42-18=0$, значит, $\varphi(x)\ \vdots\ (x-2)$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-8x^2+21x-18 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2}\qquad\qquad\quad & x^2-6x+9 \\
-6x^2+21x\qquad & \\
\underline{-6x^2+12x}\qquad & \\
9x-18 & \\
\underline{9x-18} &
\end{array}$$

Наконец, имеем

$$x^2-6x+9=(x-3)^2=0; \quad x=3.$$

Ответ: $\{2;\ 3;\ \mathrm{i};\ -\mathrm{i}\}$.

7) $z^2 = 16 + 8\mathrm{i}$ (решить двумя способами).
Имеем:

$$z = \sqrt{16+8\mathrm{i}} = 2\sqrt{4+2\mathrm{i}} = 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{i}\right)};$$

$\begin{cases} \cos\varphi_0 = \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \sin\varphi_0 = \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{cases}$, значит, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{2}$, $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Тогда

$$z = 2\sqrt{4+2\mathrm{i}} = 2\sqrt{2\sqrt{5}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right)};$$

$$z_k = 2\sqrt{2\sqrt{5}}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k}{2}\right).$$

а) При $k = 0$ имеем:

$$z_0 = 2\sqrt{2\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right),$$

так как

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}, \quad \boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}},$$

то получаем

$$\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}{2}};$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}{2}}.$$

Учитывая формулу

$$\boxed{\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}},$$

находим

Поэтому

$$\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}};$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}.$$

Значит,

$$z_0 = 2\sqrt{2\sqrt{5}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}\right) =$$
$$= 2\left(\sqrt{\sqrt{5}+2} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{5}-2}\right).$$

б) При $k = 1$

$$z_1 = 2\sqrt{2\sqrt{5}}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi}{2}\right) =$$
$$= 2\sqrt{2\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi\right)\right) =$$
$$= -2\sqrt{2\sqrt{5}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}\right) =$$
$$= -2\left(\sqrt{\sqrt{5}+2} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{5}-2}\right).$$

Решение получилось довольно сложным. Попробуем применить другой подход.
Пусть $z = x + y\mathrm{i}$. Тогда

$$z^2 = (x+y\mathrm{i})^2 = x^2 + 2xy\mathrm{i} + (y\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}.$$

Уравнение $z^2 = 16 + 8\mathrm{i}$ примет вид

$$x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = 16 + 8\mathrm{i}.$$

Это равенство возможно только при

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ xy = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - \dfrac{16}{x^2} = 16 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases},$$

откуда $x^4-16x^2-16=0$;

$$(x^2)_{1,2}=8\pm\sqrt{64+16}=8\pm 4\sqrt{5};\quad \left[\begin{aligned}&x^2=8-4\sqrt{5}\notin[0;\infty)\\&x^2=8+4\sqrt{5}\end{aligned}\right.;$$

$$x_1=\sqrt{8+4\sqrt{5}}=2\sqrt{\sqrt{5}+2};\quad x_2=-2\sqrt{\sqrt{5}+2};$$

$$y_1=\frac{4}{x_1},\qquad y_2=\frac{4}{x_2};$$

$$y_1=\frac{4}{2\sqrt{\sqrt{5}+2}}=\frac{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{5-4}}=2\sqrt{\sqrt{5}-2},$$

$$y_2=\frac{4}{-2\sqrt{\sqrt{5}+2}}=-2\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

Ответ: $\left\{-2(\sqrt{\sqrt{5}+2}+\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{5}-2});2(\sqrt{\sqrt{5}+2}+\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{5}-2})\right\}$.

8) $2z^2-(3-\mathrm{i})z+4-2\mathrm{i}=0$ (решить двумя способами).
Имеем:

$$z_{1,2}=\frac{3-\mathrm{i}\pm\sqrt{(3-\mathrm{i})^2-4\cdot 2(4-2\mathrm{i})}}{2\cdot 2}=$$

$$=\frac{3-\mathrm{i}\pm\sqrt{9-6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2-32+16\mathrm{i}}}{4}=\frac{3-\mathrm{i}\pm\sqrt{-24+10\mathrm{i}}}{4}.$$

Пусть $z'=\sqrt{-24+10\mathrm{i}}$. Тогда

$$|z'|=|-24+10\mathrm{i}|=\sqrt{24^2+10^2}=26;$$

$$-24+10\mathrm{i}=26\left(-\frac{24}{26}+\frac{10}{26}\mathrm{i}\right)=26\left(-\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\mathrm{i}\right),$$

т. е. $\begin{cases}\cos\varphi_0=-\frac{12}{13}\\ \sin\varphi_0=\frac{5}{13}\end{cases}$; $\operatorname{tg}\varphi_0=-\frac{5}{12}$; $\varphi_0=\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$. Значит,

$$-24+10\mathrm{i}=26\left(\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)\right);$$

$$\sqrt{-24+10\mathrm{i}}=\sqrt{26\left(\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)\right)};$$

$$z'_k=\sqrt{26}\left(\cos\frac{\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}+2\pi k}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}+2\pi k}{2}\right).$$

При $k=0$

$$z_0' = \sqrt{26}\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big)\Big) =$$
$$= \sqrt{26}\Big(\sin\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big) + \mathrm{i}\cos\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big)\Big).$$

Так как $\cos\Big(\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}\frac{5}{12})}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{5}{12})^2}} = \frac{12}{13}$, то

$$\sin\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big) = \sqrt{\frac{1-\cos(\operatorname{arctg}\frac{5}{12})}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}};$$
$$\cos\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big) = \sqrt{\frac{1+\cos(\operatorname{arctg}\frac{5}{12})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}},$$

значит, $z_0' = \sqrt{26}\Big(\frac{1}{\sqrt{26}} + \mathrm{i}\,\frac{5}{\sqrt{26}}\Big) = 1+5\mathrm{i}$.

При $k=1$

$$z_1' = \sqrt{26}\Big(\cos\frac{\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2\pi}{2}\Big) =$$
$$= \sqrt{26}\Big(\cos\Big(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big)\Big) =$$
$$= \sqrt{26}\Big(-\sin\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big) - \mathrm{i}\cos\Big(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\Big)\Big) =$$
$$= -\sqrt{26}\Big(\frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{5}{\sqrt{26}}\Big) = -(1+5\mathrm{i}).$$

Далее, $z_{1,2} = \frac{3-\mathrm{i} \pm z_0'}{4}$, тогда

$$z_1 = \frac{3-\mathrm{i}+1+5\mathrm{i}}{4} = 1+\mathrm{i}; \quad (z_0' = -z_1')$$
$$z_2 = \frac{3-\mathrm{i}-1-5\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}.$$

Возможен и другой способ решения.

Пусть $z = x + y\mathrm{i}$, тогда уравнение $2z^2 - (3-\mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i} = 0$ примет вид

$$2(x+y\mathrm{i})^2 - (3-\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) + 4 - 2\mathrm{i} = 0;$$
$$2x^2 + 4xyi + 2y^2\mathrm{i}^2 - 3x + x\mathrm{i} - 3y\mathrm{i} + y\mathrm{i}^2 + 4 - 2\mathrm{i} = 0;$$
$$(2x^2 - 2y^2 - y - 3x + 4) + (4xy + x - 3y - 2)\mathrm{i} = 0.$$

Это равенство возможно только при

$$\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 - y - 3x + 4 = 0 \\ 4xy + x - 3y - 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 - y - 3x + 4 = 0 \\ y = \dfrac{2-x}{4x-3} \end{cases},$$

откуда

$$2x^2 - 2\left(\frac{2-x}{4x-3}\right)^2 - \frac{2-x}{4x-3} - 3x + 4 = 0.$$

Решим это уравнение. Имеем:

$$2x^2(4x-3)^2 - 2(2-x)^2 - (2-x)(4x-3) - \\ - 3x(4x-3)^2 + 4(4x-3)^2 = 0.$$

В результате преобразований получим

$$32x^4 - 96x^3 + 156x^2 - 126x + 34 = 0.$$

Легко проверить, что $x = 1$ — корень уравнения; поделим уравнение на $(x-1)$, используя схему Горнера, получим уравнение

$$32x^3 - 64x^2 + 92x - 34 = 0.$$

Можно убедиться, что оно имеет рациональный корень $x = \frac{1}{2}$. После деления на $(2x-1)$ получим уравнение

$$16x^2 - 24x + 34 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения отрицателен, значит, вещественных корней оно не имеет.

Система примет вид $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \\ y = \dfrac{2-x}{4x-3} \end{cases}$, откуда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{3}{2}, \end{cases} \end{array}\right.$

т. е. $z_1 = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$.

Ответ: $\left\{1 + \mathrm{i};\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right\}$ — множество всех корней уравнения $2z^2 - (3-\mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i} = 0$.

Решение тренировочной работы 5

Вариант I.

1. Найдите все корни n-й степени из комплексного числа и изобразите их на координатной плоскости как вершины правильного многоугольника.

1) $\sqrt[4]{-4}$.

Имеем: $-4 = 4(-1 + 0 \cdot \mathrm{i}) = 4(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$, поэтому

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right).$$

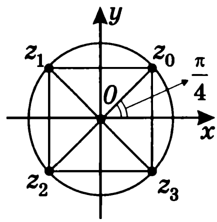
Значит, $R = \sqrt{2}$; при $k = 0, 1, 2, 3$ получаем:

$$k = 0, \quad z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \mathrm{i};$$

$$k = 1, \quad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + \mathrm{i};$$

$$k = 2, \quad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - \mathrm{i};$$

$$k = 3, \quad z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - \mathrm{i}.$$



2) $\sqrt[6]{\mathrm{i}}$.

Имеем: $\mathrm{i} = 1 \cdot (0 + \mathrm{i}) = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\sqrt[6]{\mathrm{i}} = \sqrt[6]{\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{6}.$$

Значит, $R = 1$; при $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ получаем:

$$k = 0, \quad z_0 = \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12};$$

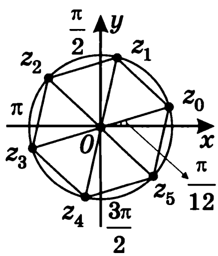
$$k = 1, \quad z_1 = \cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12};$$

$$k = 2, \quad z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4};$$

$$k = 3, \quad z_3 = \cos\frac{13\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{12};$$

$$k = 4, \quad z_4 = \cos\frac{17\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12};$$

$$k = 5, \quad z_5 = \cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}.$$

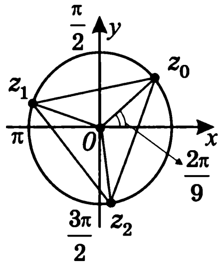


3) $\sqrt[3]{-4+4i\sqrt{3}}$.

Имеем: $-4+4i\sqrt{3}=8\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, поэтому.

$$\sqrt[3]{-4+4i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}=$$

$$=2\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}\right).$$



Значит, $R=2$; при $k=0,1,2$ получаем:

$$k=0,\quad z_0=2\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right);$$

$$k=1,\quad z_1=2\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right);$$

$$k=2,\quad z_2=2\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

2. Представьте данные комплексные числа в показательной форме и вычислите.

1) $z_1=2+2i$; $z_2=\sqrt{3}-i$. Имеем:

$$z_1=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}};$$

$$z_2=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Проведем требуемые вычисления.

а) $z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 2e^{-i\frac{\pi}{6}}=4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$;

б) $z_1:z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}:2e^{-i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$;

в) $z_1^6=\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6=2^9e^{\frac{3\pi}{2}i}$;

г) $\sqrt[4]{z_2}=\sqrt[4]{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\sqrt[4]{2}e^{\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}i}$. При $k=0,1,2,3$ имеем:

$$k=0,\quad (z_2)_0=\sqrt[4]{2}e^{-\frac{\pi}{24}i};$$

$$k=1,\quad (z_2)_1=\sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{24}i};$$

$$k=2,\quad (z_2)_2=\sqrt[4]{2}e^{\frac{23\pi}{24}i};$$

$$k=3,\quad (z_2)_3=\sqrt[4]{2}e^{-\frac{13\pi}{24}i}.$$

2) $z_1 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i}$; $z_2 = \sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$.
Имеем:

$$z_1 = 1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big) = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}};$$

$$\overline{z}_1 = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}};$$

$$z_2 = \sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i} = 2\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\Big) =$$

$$= 2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)+\mathrm{i}\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big) = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}};$$

$$\overline{z}_2 = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}.$$

Проведем требуемые вычисления.

а) $z_1\cdot z_2 = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\cdot 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 4\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})\mathrm{i}} = 4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$;

б) $z_2 : z_1 = \big(2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\big) : \big(2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\big) = \mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{7\pi}{12}\mathrm{i}}$;

в) $z_2^4 = \big(2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\big)^4 = 2^4\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}$;

г) $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}} = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}\mathrm{i}}$. При $k=0,1,2$ имеем:

$$k=0,\quad (z_1)_0 = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{9}\mathrm{i}};$$
$$k=1,\quad (z_1)_1 = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{9}\mathrm{i}};$$
$$k=2,\quad (z_1)_2 = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

д) $\sqrt[4]{z_2} = \sqrt[4]{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\mathrm{i}}$. При $k=0,1,2,3$ имеем:

$$k=0,\quad (z_2)_0 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{16}\mathrm{i}};$$
$$k=1,\quad (z_2)_1 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{16}\mathrm{i}};$$
$$k=2,\quad (z_2)_2 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{15\pi}{16}\mathrm{i}};$$
$$k=3,\quad (z_2)_3 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{23\pi}{16}\mathrm{i}}.$$

е) $\sqrt[4]{\overline{z}_1}\cdot\sqrt[3]{\overline{z}_2} = \sqrt[4]{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}}\cdot\sqrt[3]{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\mathrm{i}}\cdot\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi t}{3}\mathrm{i}}$.
Пусть $z' = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\mathrm{i}}$, $z'' = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi t}{3}\mathrm{i}}$. При $k=0,1,2,3$ получаем:

$$k=0,\quad z'_0 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}};$$
$$k=1,\quad z'_1 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}};$$
$$k=2,\quad z'_2 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{12}\mathrm{i}};$$
$$k=3,\quad z'_3 = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{17\pi}{12}\mathrm{i}}.$$

При $t=0,1,2$ имеем:

$$t=0,\quad z_0''=\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{12}i};$$
$$t=1,\quad z_1''=\sqrt[3]{2}e^{\frac{3\pi}{4}i};$$
$$t=2,\quad z_2''=\sqrt[3]{2}e^{\frac{17\pi}{12}i}.$$

Осталось рассмотреть всевозможные произведения $z_k'\cdot z_t''$:

$$z_0'z_0''=\sqrt[4]{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{12}i}=\sqrt[12]{2^7}e^{(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12})i}=\sqrt[12]{2^7};$$
$$z_0'z_1''=\sqrt[4]{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}\sqrt[3]{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=\sqrt[12]{2^7}e^{(-\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{4})i}=\sqrt[12]{2^7}e^{\frac{2\pi}{3}i};$$
$$z_0'z_2''=\sqrt[4]{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}\sqrt[3]{2}e^{\frac{17\pi}{12}i}=\sqrt[12]{2^7}e^{(-\frac{\pi}{12}+\frac{17\pi}{12})i}=\sqrt[12]{2^7}e^{\frac{4\pi}{3}i};$$
$$z_1'z_0''=\sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{12}i}=\sqrt[12]{2^7}e^{(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12})i}=\sqrt[12]{2^7}e^{\frac{\pi}{2}i};$$
$$z_1'z_1''=\sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}\sqrt[3]{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=\sqrt[12]{2^7}e^{(\frac{5\pi}{12}+\frac{3\pi}{4})i}=\sqrt[12]{2^7}e^{\frac{7\pi}{6}i};$$
$$z_1'z_2''=\sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}\sqrt[3]{2}e^{\frac{17\pi}{12}i}=\sqrt[12]{2^7}e^{(\frac{5\pi}{12}+\frac{17\pi}{12})i}=\sqrt[12]{2^7}e^{\frac{11\pi}{6}i}.$$

Аналогично можно получить остальные шесть значений. Однако можно действовать несколько иначе. Заметим, что

$$\sqrt[4]{z_1}\cdot\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[4]{2e^{-\frac{\pi}{3}i}}\cdot\sqrt[3]{2e^{\frac{\pi}{4}i}}=\sqrt[12]{2^7e^{-\pi i}\cdot e^{\pi i}}=$$
$$=\sqrt[12]{2^7}e^{\frac{0+2\pi k}{12}i}=\sqrt[12]{2^7}e^{\frac{\pi k}{6}i}.$$

Тогда при $k=0,1,2,\ldots,11$ получим

$$k=0,\quad z_0'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^0=\sqrt[12]{2^7};$$
$$k=1,\quad z_1'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{\pi}{6}i};$$
$$k=2,\quad z_2'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i};$$
$$k=3,\quad z_3'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i};$$
$$k=4,\quad z_4'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i};$$
$$k=5,\quad z_5'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{5\pi}{6}i};$$
$$k=6,\quad z_6'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\pi i};$$
$$k=7,\quad z_7'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{7\pi}{6}i};$$
$$k=8,\quad z_8'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{4\pi}{3}i};$$
$$k=9,\quad z_9'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{3\pi}{2}i};$$
$$k=10,\quad z_{10}'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{5\pi}{3}i};$$
$$k=11,\quad z_{11}'''=\sqrt[12]{2^7}\cdot e^{\frac{11\pi}{6}i}.$$

Такой способ вычислений оказывается значительно проще.

Вариант II.

1. Найдите все корни n-й степени из комплексного числа и проиллюстрируйте их на координатной плоскости вершинами правильного многоугольника.

1) $\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)$, поскольку $-64=64(-1+0\cdot\mathrm{i})=64(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$.
Значит, $R=2$. При $k=0,1,2,3,4,5$ получаем:

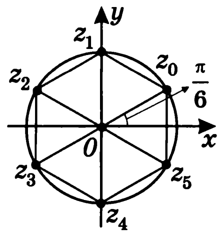
$k=0,\quad z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{3}+\mathrm{i};$

$k=1,\quad z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=2(0+1\cdot\mathrm{i})=2\mathrm{i};$

$k=2,\quad z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\sqrt{3}+\mathrm{i};$

$k=3,\quad z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)=$

$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\sqrt{3}-\mathrm{i};$



$k=4,\quad z_4=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=$

$=2(0+\mathrm{i}(-1))=-2\mathrm{i};$

$k=5,\quad z_5=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)=$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{3}-\mathrm{i};$

2) $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}=\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}}=\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}$, поскольку $-\mathrm{i}=1\cdot(0-1\cdot\mathrm{i})=\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}$.
Значит, $R=1$. При $k=0,1,2$ получаем:

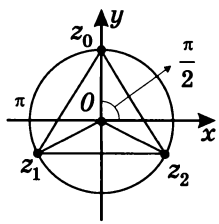
$k=0,\quad z_0=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=0+1\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i};$

$k=1,\quad z_1=\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}=$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i};$

$k=2,\quad z_2=\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$



3) $\sqrt[4]{8-8\mathrm{i}\sqrt{3}}=\sqrt[4]{16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=$

$$=2\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{4}\right),$$

т. к. $8-8\mathrm{i}\sqrt{3}=16\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.

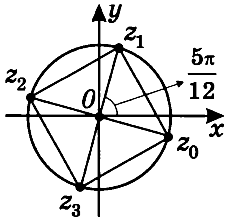
Значит, $R=2$. При $k=0,1,2,3$ получаем:

$$k=0,\quad z_0=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right);$$

$$k=1,\quad z_1=2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

$$k=2,\quad z_2=2\left(\cos\frac{17\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12}\right);$$

$$k=3,\quad z_3=2\left(\cos\frac{23\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$



2. Представьте данные комплексные числа в показательной форме и вычислите.

1) $z_1=2-2\mathrm{i}$; $z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

Имеем:

$$z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}};$$

$$z_2=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}};$$

Выполним требуемые вычисления.

а) $z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\cdot 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{i}}=4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$;

б) $z_1:z_2=\left(2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right):\left(2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{i}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}}$;

в) $z_1^6=\left(2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^6=2^9\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}$;

г) $\sqrt[4]{z_2}=\sqrt[4]{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}}=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}\mathrm{i}}$.

При $k=0,1,2,3$ получаем:

$$k=0,\quad z_0'=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{24}\mathrm{i}};$$

$$k=1,\quad z_1'=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{13\pi}{24}\mathrm{i}};$$

$$k=2,\quad z_2'=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{25\pi}{24}\mathrm{i}};$$

$$k=3,\quad z_3'=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{37\pi}{24}\mathrm{i}}.$$

2) $z_1 = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$; $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$.
Имеем:

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big) = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}};$$
$$z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i} = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\Big) = 2\Big(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\Big) = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}.$$

Проведем требуемые вычисления.

а) $z_1 : z_2 = \big(2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\big) : \big(2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\big) = \mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{7\pi}{12}\mathrm{i}}$;

б) $z_1 z_2 = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \cdot 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 4\mathrm{e}^{(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})\mathrm{i}} = 4\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}}$;

в) $z_1^4 = \big(2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\big)^4 = 16\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}$;

г) $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\mathrm{i}}$. При $k = 0, 1, 2$ получим:

$$k = 0, \quad z_0' = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{12}\mathrm{i}};$$
$$k = 1, \quad z_1' = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}};$$
$$k = 2, \quad z_2' = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{17\pi}{12}\mathrm{i}}.$$

д) $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\mathrm{i}}$. При $k = 0, 1, 2, 3$ получим:

$$k = 0, \quad z_0' = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{12}\mathrm{i}};$$
$$k = 1, \quad z_1' = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{12}\mathrm{i}};$$
$$k = 2, \quad z_2' = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{12}\mathrm{i}};$$
$$k = 3, \quad z_3' = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{17\pi}{12}\mathrm{i}}.$$

е) $\sqrt[4]{\overline{z}_1} \cdot \sqrt[3]{\overline{z}_2}$.
Находим:

$$\overline{z}_1 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big) =$$
$$= 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}};$$
$$\overline{z}_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i} = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\Big) =$$
$$= 2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big) = 2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[4]{\overline{z}_1} = \sqrt[4]{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{4}\mathrm{i}}; \qquad k = 0; 1; 2; 3;$$
$$\sqrt[3]{\overline{z}_2} = \sqrt[3]{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi t}{3}\mathrm{i}}; \quad t = 0; 1; 2.$$

Комбинируя значения k и t всеми возможными способами, получим 12 корней. Однако этот путь технически достаточно сложен. Можно действовать несколько иначе, что быстрее приводит к цели.
Можем записать

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\overline{z_1}}\cdot\sqrt[3]{\overline{z_2}} &= \sqrt[12]{(\overline{z_1})^3(\overline{z_2})^4} = \sqrt[12]{\left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^3\left(2e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^4} = \\ &= \sqrt[12]{2^3e^{\pi i}2^4e^{-\pi i}} = \sqrt[12]{2^7e^{\pi i-\pi i}} = \\ &= \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{0+2\pi k}{12}i} = \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{\pi k}{6}i}.\end{aligned}$$

Отсюда при $k=0,1,\ldots,11$ получим:

$$\begin{aligned}
k&=0, & z_0' &= \sqrt[12]{2^7};\\
k&=1, & z_1' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{\pi}{6}i};\\
k&=2, & z_2' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{\pi}{3}i};\\
k&=3, & z_3' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{\pi}{2}i};\\
k&=4, & z_4' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{2\pi}{3}i};\\
k&=5, & z_5' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{5\pi}{6}i};\\
k&=6, & z_6' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\pi i};\\
k&=7, & z_7' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{7\pi}{6}i};\\
k&=8, & z_8' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{4\pi}{3}i};\\
k&=9, & z_9' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{3\pi}{2}i};\\
k&=10, & z_{10}' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{5\pi}{3}i};\\
k&=11, & z_{11}' &= \sqrt[12]{2^7}\,e^{\frac{11\pi}{6}i}.
\end{aligned}$$

Решение тренировочной работы 6

Вариант I.

1. Решите уравнение $z^2+2\overline{z}+1=0$.

Так как $z=x+y\mathrm{i}$, $\overline{z}=x-y\mathrm{i}$, $x,y\in\mathbb{R}$, то уравнение принимает вид

$$(x+y\mathrm{i})^2+2(x-y\mathrm{i})+1=0;$$
$$x^2+2xy\mathrm{i}+y^2\mathrm{i}^2+2x-2y\mathrm{i}+1=0;$$
$$(x^2-y^2+2x+1)+2(xy-y)\mathrm{i}=0.$$

Равенство возможно только если

$$\begin{cases} x^2-y^2+2x+1=0 \\ 2(xy-y)=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x+1)^2-y^2=0 \\ y(x-1)=0 \end{cases}.$$

а) $\begin{cases} y=0 \\ (x+1)^2-y^2=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases},$

значит, $z_1=-1$.

б) $\begin{cases} x=1 \\ (x+1)^2-y^2=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=1 \\ y^2=2^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases},$

откуда $z_2=1+2\mathrm{i}$, $z_3=1-2\mathrm{i}$.

Ответ: $\{-1;1-2\mathrm{i};1+2\mathrm{i}\}$.

2. $f(x)=0$, где $f(x)=4x^4-24x^3+57x^2+18x-45$.

Известно, что $f(3+\mathrm{i}\sqrt{6})=0$. Найдите остальные корни.

Так как дано уравнение с действительными коэффициентами, то если один из корней — комплексное число $x_1=3+\mathrm{i}\sqrt{6}$, то сопряженное ему число $\overline{x_1}=3-\mathrm{i}\sqrt{6}$ также есть корень.

Тогда по теореме, обратной теореме Виета, система

$$\begin{cases} x_1+x_2=3+\mathrm{i}\sqrt{6}+3-\mathrm{i}\sqrt{6}=6=-p \\ x_1x_2=(3+\mathrm{i}\sqrt{6})(3-\mathrm{i}\sqrt{6})=9+6=15=q \end{cases}$$

порождает уравнение $x^2-6x+15=0$, значит, $f(x) \vdots (x^2-6x+15)$:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4-24x^3+57x^2+18x-45 & x^2-6x+15 \\ \cline{2-2} \underline{4x^4-24x^3+60x^2} & 4x^2-3 \\ -\ 3x^2+18x-45 & \\ \underline{-\ 3x^2+18x-45} & \end{array}$$

Далее, $4x^2-3=0$; $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 3-\mathrm{i}\sqrt{6}; 3+\mathrm{i}\sqrt{6}\right\}$.

3. Вычислите z^6, если $z+2\overline{z}=3-\mathrm{i}$
Пусть $z=x+y\mathrm{i}$, тогда $\overline{z}=x-y\mathrm{i}$ и уравнение примет вид

$$x+y\mathrm{i}+2(x-y\mathrm{i})=3-\mathrm{i},$$
$$x+2x+y\mathrm{i}-2y\mathrm{i}+\mathrm{i}-3=0,$$
$$3(x-1)+(-y+1)\mathrm{i}=0.$$

Значит, $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, т. е. $z=1+\mathrm{i}$. Представим это число в тригонометрической форме:

$$z=1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Тогда

$$z^6=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^6=$$
$$=2^3\left(\cos\frac{6\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{4}\right)=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=$$
$$=8(0-\mathrm{i})=-8\mathrm{i}.$$

4. Найдите уравнение кривой, для которой $|z+1+\mathrm{i}|=|z-1+2\mathrm{i}|$.
Пусть $z=x+y\mathrm{i}$, тогда

$$|x+y\mathrm{i}+1+\mathrm{i}|=|x+y\mathrm{i}-1+2\mathrm{i}|;$$
$$|(x+1)+(y+1)\mathrm{i}|=|(x-1)+(y+2)\mathrm{i}|;$$
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}.$$

Преобразуя, получим

$$(x+1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2;$$
$$(x+1)^2-(x-1)^2=(y+2)^2-(y+1)^2;$$
$$(x+1+x-1)(x+1-x+1)=(y+2+y+1)(y+2-y-1);$$
$$2x\cdot 2=(2y+3)\cdot 1;$$
$$2y=4x-3,$$

или $y=2x-1{,}5$, т. е. уравнение прямой.

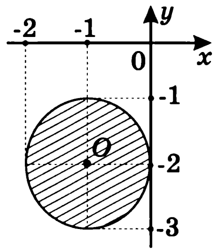
5. Заштрихуйте на плоскости множество всех точек кривой удовлетворяющих неравенству $|z+1+2\mathrm{i}| \leqslant 1$.

Пусть $z = x + y\mathrm{i}$. Имеем:

$$z + 1 + 2\mathrm{i} = x + y\mathrm{i} + 1 + 2\mathrm{i} = \\ = (x+1) + (y+2)\mathrm{i}.$$

Неравенство принимает вид

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} \leqslant 1;$$
$$(x+1)^2 + (y+2)^2 \leqslant 1.$$



Это уравнение круга радиуса $R = 1$ с центром в точке $O(-1; -2)$.

6. Найдите z, если

$$\begin{cases} |z| = 0{,}5|b| \\ |\arg z - \arg b| = \dfrac{\pi}{6} \end{cases},$$

где $b = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Имеем: $|b| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$. Из первого уравнения находим $|z| = 0{,}5 \cdot 4 = 2$, т. е. $z = 2(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$. Далее,

$$b = 4\left(\frac{-2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right),$$

откуда $\begin{cases} \cos\varphi_0 = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi_0 = \sqrt{3}$, $\varphi_0 = \dfrac{4\pi}{3}$.

Из второго уравнения системы находим

$$\left|\varphi_1 - \frac{4\pi}{3}\right| = \frac{\pi}{6}; \quad \left[\begin{array}{l} \varphi_1 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3} \\ \varphi_1 = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \varphi_1 = \dfrac{3\pi}{2} \\ \varphi_1 = \dfrac{7\pi}{6} \end{array}\right..$$

Следовательно, решений два:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i};$$
$$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 + \mathrm{i}) = -2\mathrm{i}.$$

7. Найдите область изменения $|z-6+2\mathrm{i}|$, если $\begin{cases}|z-6|=\sqrt{5}\\|z+2\mathrm{i}|=5\end{cases}$.

$$\begin{cases}\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\sqrt{5}\\\sqrt{x^2+(y+2)^2}=5\end{cases};\quad\begin{cases}(x-6)^2+y^2=5\\x^2+(y+2)^2=25\end{cases};\quad\begin{cases}\boxed{1}-\boxed{2}\\\boxed{2}\end{cases};$$

$$x^2-12x+36+y^2-x^2-y^2-4y-4=5-25;$$

$$-12x-4y+32=-20;$$

$$-3x-y+8=-5;$$

$$y=-3x+13;$$

$$\begin{cases}y=-3x+13\\x^2+(y+2)^2=25\end{cases};\quad\begin{cases}y=-3x+13\\x^2+(-3x+15)^2=25\end{cases};$$

$$x^2+9x^2-90x+225=25;$$

$$10x^2-90x+200=0;$$

$$x^2-9x+20=0;$$

$$\left[\begin{array}{ll}x=5, & y=-2\\x=4, & y=1\end{array}\right.;\quad\left[\begin{array}{l}z_1=5-2\mathrm{i}\\z_2=4+\mathrm{i}\end{array}\right..$$

а) $z_1=5-2\mathrm{i}$; $|5-2\mathrm{i}-6+2\mathrm{i}|=|-1|=1$;
б) $z_2=4+\mathrm{i}$; $|4+\mathrm{i}-6+2\mathrm{i}|=|-2+3\mathrm{i}|=\sqrt{13}$.

$$E(|z-6+2\mathrm{i}|)=\{1;\sqrt{13}\}.$$

8. При каких $a\in\mathbb{R}$ корнем уравнения

$$x^3-(a+3)x^2+6a^2x+a^2-5=0$$

является число $x_1=\dfrac{8}{\left(\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{20}+\mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{20}\right)\right)^5}$? Найдите остальные корни.

Выражение $\sin\frac{3\pi}{20}+\mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{20}$ не является тригонометрической формулой комплексного числа; найдем его тригонометрическую форму:

$$\sin\frac{3\pi}{20}+\mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{20}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{20}\right)+\mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{20}\right)=$$
$$=\cos\frac{7\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{20}.$$

Теперь можно применить теорему Муавра:

$$\left(\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{20}+\mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{20}\right)\right)^5=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{20}\right)\right)^5=$$
$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Мы получаем

$$x_1 = \frac{8}{4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{\cos^2\frac{7\pi}{4} + \sin^2\frac{7\pi}{4}} =$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = 1 + \mathrm{i}.$$

Так как по условию $a \in \mathbb{R}$, то $\overline{x}_1 = 1 - \mathrm{i} = x_2$ также будет корнем уравнения.

Поскольку $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$, по тереме, обратной теореме Виета, уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Значит, уравнение

$$x^3 - (a+3)x^2 + 6a^2x + a^2 - 5 = 0$$

должно делиться на многочлен $(x^2 - 2x + 2)$ без остатка:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - (a+3)x^2 + 6a^2x + (a^2-5) & x^2 - 2x + 2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 - 2x^2 + 2x} \qquad\qquad & x - (a+1) \\
-(a+1)x^2 + (6a^2-2)x + (a^2-5) & \\
\underline{-(a+1)x^2 + 2(a+1)x - 2(a+1)} & \\
(6a^2 - 2a - 4)x + (a^2 + 2a - 3) &
\end{array}$$

Чтобы остаток был равен нулю при любых x, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} 6a^2 - 2a - 4 = 0 \\ a^2 + 2a - 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2(a-1)(3a+2) = 0 \\ (a+3)(a-1) = 0 \end{cases},$$

откуда $a = 1$. Тогда $x = a + 1$ — третий корень уравнения.

Примечание. Можно было сразу подставить $x_1 = 1 + \mathrm{i}$ в уравнение и получить, что x_1 является корнем только при $a = 1$. Но тогда сложнее будет найти остальные корни. Впрочем, это дело вкуса.

Ответ: при $a = 1$ уравнение $x^3 - (a+3)x^2 + 6a^2x + a^2 - 5 = 0$ имеет корни

$$x_1 = \frac{8}{\left(\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{20} + \mathrm{i}\cos\frac{3\pi}{20}\right)\right)^5} = 1 + \mathrm{i}, \quad x_2 = 1 - \mathrm{i}, \quad x_3 = 2.$$

Вариант II.

1. Решите уравнение $z^2 - 2(z+\overline{z}) + 4 = 0$.
Пусть $z = x + y\mathrm{i}$, тогда $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$. Подставляя в уравнение, получим

$$(x + y\mathrm{i})^2 - 2(x + y\mathrm{i} + x - y\mathrm{i}) + 4 = 0;$$
$$x^2 + 2xy\mathrm{i} + y^2\mathrm{i}^2 - 4x + 4 = 0;$$
$$(x^2 - y^2 - 4x + 4) + 2xy\mathrm{i} = 0.$$

Равенство возможно, только когда

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 4 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим возможные случаи:

а) $\begin{cases} y = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases},$

значит, $z_1 = 2$.

б) $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases},$

значит, $z_2 = 2\mathrm{i}$, $z_3 = -2\mathrm{i}$.

Ответ: $\{2; -2\mathrm{i}; 2\mathrm{i}\}$ — множество всех корней уравнения $z^2 - 2(z+\overline{z}) + 4 = 0$.

2. $f(x) = 0$, где $f(x) = 4x^4 - 24x^3 + 63x^2 - 18x + 45$, причем $f(3 - \mathrm{i}\sqrt{6}) = 0$. Найдите остальные корни.
Поскольку дано уравнение с действительными коэффициентами, если один из корней — комплексное число $x_1 = 3 - \mathrm{i}\sqrt{6}$, то сопряженное число $x_2 = \overline{x}_1 = 3 + \mathrm{i}\sqrt{6}$ также есть корень.
По теореме, обратной теореме Виета, система $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1x_2 = 15 \end{cases}$ порождает уравнение $x^2 - 6x + 15 = 0$, значит, $f(x) \,\vdots\, (x^2 - 6x + 15)$:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4-24x^3+63x^2-18x+45 & x^2-6x+15 \\ \cline{2-2} \underline{4x^4-24x^3+60x^2} \qquad\qquad\quad & 4x^2+3 \\ 3x^2-18x+45 & \\ \underline{3x^2-18x+45} & \end{array}$$

Далее $4x^2+3=0$; $x^2=-\frac{3}{4}$; $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{array}\right.$.

Ответ: $\left\{3-\mathrm{i}\sqrt{3};\ 3+\mathrm{i}\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

3. Вычислите z^5, если $3z-\overline{z}=4+8\mathrm{i}$.
Пусть $z=x+y\mathrm{i}$, тогда $\overline{z}=x-y\mathrm{i}$ и уравнение примет вид

$$3(x+y\mathrm{i})-x+y\mathrm{i}=4+8\mathrm{i};$$
$$(2x-4)+(4y-8)\mathrm{i}=0,$$

откуда $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} z &=2+2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)= \\ &=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} z^5 &=\left(2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^5= \\ &=2^{\frac{15}{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)= \\ &=-2^7(1+\mathrm{i})=-128-128\mathrm{i}. \end{aligned}$$

4. Найдите уравнение кривой, для которой

$$|z+2-2\mathrm{i}|=|z-1-3\mathrm{i}|.$$

Пусть $z=x+y\mathrm{i}$, тогда имеем

$$|x+y\mathrm{i}+2-2\mathrm{i}|=|x+y\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}|;$$
$$|(x+2)+(y-2)\mathrm{i}|=|(x-1)+(y-3)\mathrm{i}|;$$
$$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2};$$
$$(x+2)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y-3)^2;$$
$$(x+2)^2-(x-1)^2=(y-3)^2-(y-2)^2;$$
$$(x+2+x-1)(x+2-x+1)=(y-3+y-2)(y-3-y+2);$$
$$(2x-1)\cdot 3=(2y-5)\cdot(-1),$$

т. е. $2y-5=-6x+3$; $2y=-6x+8$; $y=-3x+4$.
Это уравнение прямой.

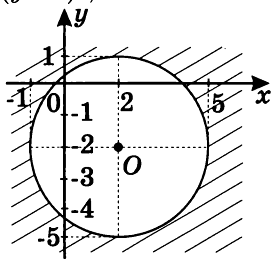
5. Заштрихуйте на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$|z-2+2\mathrm{i}| \geqslant 3.$$

Пусть $z = x + y\mathrm{i}$, тогда

$$z-2+2\mathrm{i} = x+y\mathrm{i}-2+2\mathrm{i} = (x-2)+(y+2)\mathrm{i};$$

$$|z-2+2\mathrm{i}| = |(x-2)+(y+2)\mathrm{i}| =$$
$$= \sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}.$$



Неравенство принимает вид

$$(x-2)^2+(y+2)^2 \geqslant 3^2$$

и, следовательно, определяет круг радиуса $R=3$ с центром точке $O(2;-2)$.

6. Найдите z, если

$$\begin{cases} |z| = 2|d| \\ |\arg d - \arg z| = \dfrac{\pi}{3} \end{cases},$$

где $d = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
Имеем:

$$d = \sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Следовательно, $|z| = 2|d| = 4$ и $\arg d = \dfrac{11\pi}{6}$.
Из первого уравнения следует, что

$$z = 4(\cos\varphi_0 + \mathrm{i}\sin\varphi_0), \quad \text{где} \quad \arg z = \varphi_0 \in [0; 2\pi).$$

Второе уравнение дает $|\arg d - \arg z| = \left|\dfrac{11\pi}{6} - \varphi_0\right| = \dfrac{\pi}{3}$;

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_0 = \dfrac{11\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} \\ \varphi_0 = \dfrac{11\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \varphi_0 = \dfrac{3\pi}{2} \\ \varphi_0 = \dfrac{13\pi}{6} \notin [0; 2\pi) \end{array}\right..$$

Значит, существует только одно число, удовлетворяющее условиям задачи, а именно

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 4(0-\mathrm{i}) = -4\mathrm{i}.$$

7. Найдите область изменения $\mathrm{Im}z$, если $\begin{cases} |z+10| = \sqrt{65}, \\ |z-2\mathrm{i}| = \sqrt{13}. \end{cases}$

Пусть $z = x + \mathrm{i}y$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} (x+10)^2 + y^2 = 65 \\ x^2 + (y-2)^2 = 13 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 + 20x + 100 + y^2 = 65 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 = 13 \end{cases}; \quad \begin{cases} \boxed{1} - \boxed{2} \\ \boxed{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 20x + 4y + 96 = 52 \\ x^2 + (y-2)^2 = 13 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -11 - 5x \\ x^2 + (-5x-13)^2 = 13 \end{cases};$$

$$x^2 + 25x^2 + 130x + 169 = 13;$$

$$26x^2 + 130x + 156 = 0;$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -2, \quad y = -1 \\ x = -3, \quad y = 4 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} z_1 = -2 - \mathrm{i} \\ z_2 = -3 + 4\mathrm{i} \end{array}\right..$$

Таким образом, $E(\mathrm{Im}z) = \{-1; 4\}$.

8. При каких $b \in \mathbb{R}$ корнем уравнения

$$x^3 - (b+6)x^2 + 8b^2x + 95 + b^2 = 0$$

является число $x_1 = \dfrac{32}{0{,}25\left(\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right)\right)^{27}}$?

Найдите остальные корни.

Найдем тригонометрическую форму числа $-\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}$:

$$-\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{11\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi - \frac{11\pi}{12}\right) =$$
$$= \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}.$$

Далее,

$$\left(\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)^{27} = 2^{\frac{27}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)^{27} =$$
$$= 2^{\frac{9}{2}}\left(\cos\frac{27\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{27\pi}{12}\right) = 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{4}\right) =$$
$$= 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = 16(1+\mathrm{i});$$

$$x_1 = \frac{32}{0{,}25 \cdot 16(1+\mathrm{i})} = \frac{8}{1+\mathrm{i}} = \frac{8(1-\mathrm{i})}{2} = 4 - 4\mathrm{i}.$$

Поскольку уравнение имеет действительные коэффициенты, то вместе с x_1 корнем будет также сопряженное число $x_2 = \overline{x}_1 = 4 + 4\mathrm{i}$.

Так как $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 x_2 = 32 \end{cases}$, то $x^2 - 8x + 32 = 0$ имеет корни x_1 и x_2.

Значит, исходное уравнение должно делиться на $x^2 - 8x + 32$ без остатка:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - (b+6)x^2 + 8b^2x + (b^2+95) & x^2 - 8x + 32 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - 8x^2 + 32x} & x - (b-2) \\ \quad -(b-2)x^2 + 8(b^2-4)x + (b^2+95) & \\ \quad \underline{-(b-2)x^2 + 8(b-2)x - 32(b-2)} & \\ \qquad 8(b^2 - b - 2)x + (b^2 + 32b + 31) & \end{array}$$

Чтобы остаток был равен нулю, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} b^2 - b - 2 = 0 \\ b^2 + 32a + 31 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (b-2)(b+1) = 0 \\ (b+1)(b+31) = 0 \end{cases},$$

откуда $b = -1$, и $x = b - 2 = -3$ — третий корень уравнения.

Ответ: при $b = -1$ уравнение $x^3 - (b+6)x^2 + 8b^2x + 95 + b^2 = 0$ имеет корни

$$x_1 = \frac{32}{0{,}25\left(\sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right)\right)^{27}} = 4 - 4\mathrm{i},$$

$$x_2 = 4 + 4\mathrm{i},$$

$$x_3 = -3.$$

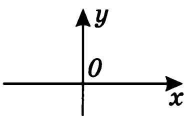
Ответы к самостоятельным работам

Самостоятельная работа 1

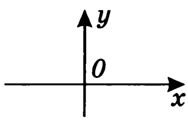
1. $52-15\mathrm{i}$, $\frac{48}{29}+\frac{25}{29}\mathrm{i}$; **2.** $\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}$; **3.** $4\mathrm{i}$; **4.** $-3{,}6-2{,}2\mathrm{i}$; **5.** $2a$ при $-1\leqslant a\leqslant 1$; **6.** $-117+44\mathrm{i}$; **7.** $-32(\sqrt{3}-1)+32(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}$; **8.** $2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$; **9.** $-\frac{836}{338}+\frac{123}{338}\mathrm{i}$; **10.** $0{,}72+3{,}54\mathrm{i}$.

Самостоятельная работа 2

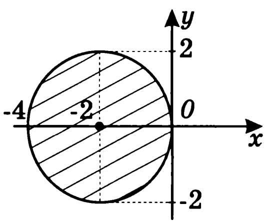
1. Ось абсцисс.



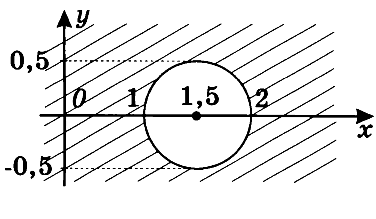
2. Ось ординат.

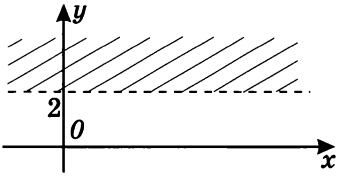


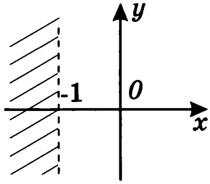
3. Внутренняя часть круга $R=2$ с центром в точке $(-2;0)$.



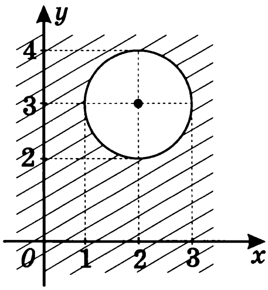
4. Часть плоскости вне круга $R=\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{3}{2};0\right)$.



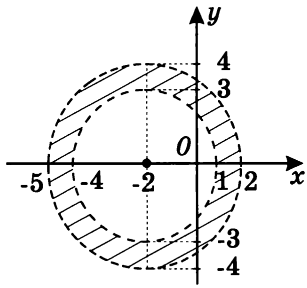
5. 

6. 

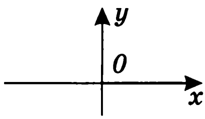
7. Часть плоскости вне круга $R=1$ с центром в точке $(2;3)$.



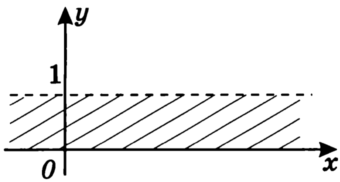
8. Кольцо с центром в точке $(0;-2)$, $R=4$; $r=3$.



9. Полуось оси абсцисс.

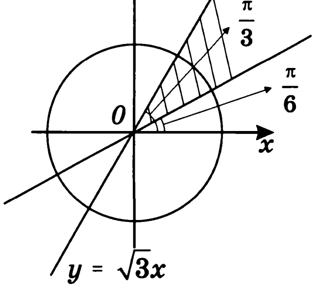


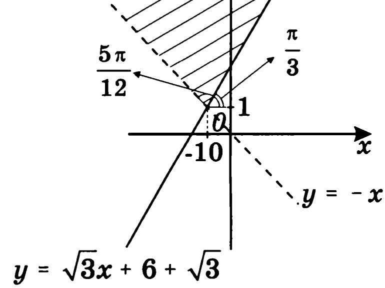
10. Полоса.



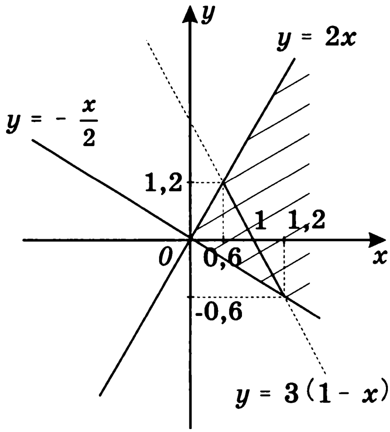
Самостоятельная работа 3

1. 1; 2. 2^{60}; 3. -2^{7}; 4. -2^{32}; 5. $-2^{14}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+\mathrm{i})$;

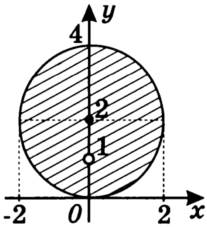
6. 

7. 

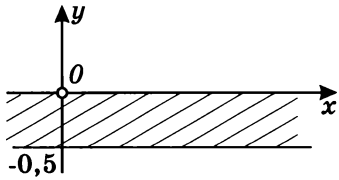
8.



9. Внутренность круга без точки $(0; 1)$.

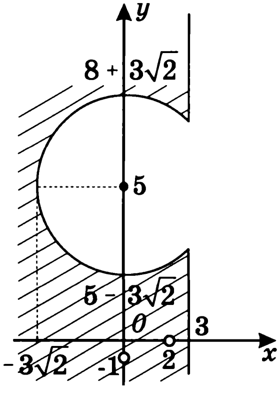


10.

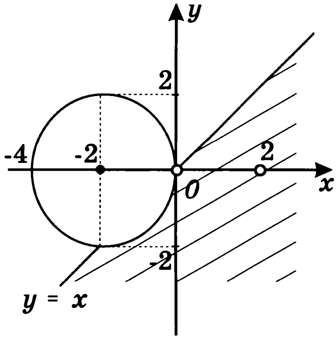


Самостоятельная работа 4

1.



2.



3. $\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} \in \left[\dfrac{6-\sqrt{6}}{4}; \dfrac{6+\sqrt{6}}{4}\right]$; **4.** $f_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$ при $z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{4}\mathrm{i}$; **5.** $f_{\text{наиб}} = 2$.

Самостоятельная работа 5

1. 6; **2.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = 2 - 3\mathrm{i} \\ z_2 = -4 - 3\mathrm{i} \end{array}\right.$; **3.** $A(0;-1); B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right); C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. Точки A, B, C принадлежат единичной окружности, причем делят ее на три равные части. **4.** $b=-1; x_1 = 3; x_{2,3} = 1 \pm \mathrm{i}$; **5.** $a=1$; **6.** $a=1$; **7.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$; **8.** $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Научный редактор серии *А. В. Семенов*
Художник *Е.И. Герасимчук*
Компьютерная верстка *В. Р. Мешков*
Компьютерный набор *К. В. Шевяков*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.Б. Смирнов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
Тел.: (812) 943-8076; e-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; e-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

Подписано в печать 10.02.2013. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Печ. л. 11. Тираж 1000 экз. (По требованию)
Заказ № Пет-020.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Отпечатано с диапозитивов, предоставленных издательством
«Петроглиф», в типографии Издательского дома КДУ.
119234, Москва, а/я 587. Тел./факс (495) 638-57-34;
e-mail: kdu@kdu.ru; www.kdu.ru.

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

---

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Уравнения и неравенства с параметрами.
12. Задачи с параметрами на экзаменах.
13. Введение в математический анализ.
14. Комплексные числа.
15. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
16. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 978-5-906226-20-4
9 785906 226204

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

А. Х. Шахмейстер